

N° d'enregistrement

au C.N.R.S.

# THESE DE DOCTEUR INGENIEUR

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE PARIS

par

M. PIERRE VELLAY

pour obtenir

le grade de **DOCTEUR INGENIEUR**

---

Sujet de la Thèse : ETUDE DES PHENOMENES THERMIQUES TRANSITOIRES  
DANS UN DISQUE DE FREIN.

soutenue le 15 Juin 1971

devant la Commission d'Examen

MM. **PONCIN** Président

**SIESTRUNCK** Examineurs

**VICHNIEVSKY**



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41550415\\_0042](https://archive.org/details/IA41550415_0042)

Que Monsieur le Professeur PONCIN, qui a bien voulu accepter la présidence du jury, qui a permis, grâce à son enseignement donné dans le cadre de la préparation au D.E.A, de faire progresser cette étude, trouve ici le témoignage de notre profonde gratitude.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur VICHNIEVSKY, pour avoir dirigé cette étude, pour ses conseils éclairés et bienveillants, Monsieur le Professeur SIESTRUNCK qui a bien voulu accepter de faire parti du jury.

Nous tenons à remercier Messieurs GIRONNET et LOURADOUR, sans qui la partie expérimentale n'aurait pu être menée à terme, Messieurs LEBLANC et PLANSON pour l'aide qu'ils nous ont apportée, Monsieur MICHEL qui nous a permis de réaliser le banc d'essai, la direction de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers qui nous a autorisés à poursuivre les essais dans ses laboratoires.

Que tous nos Maîtres et Professeurs, de la Faculté des Sciences de Paris, de l'Ecole Nationale Supérieure des Pétroles et des Moteurs, de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, qui nous ont permis, de près ou de loin de mener cette étude à bien, trouvent ici l'expression de notre sincère reconnaissance.









# 1

## A

### BANC D'ESSAI DES FREINS A DISQUE

- |    |                                                              |   |
|----|--------------------------------------------------------------|---|
| 1  | Materiel d'essai. Calcul du volant d'inertie.                | 4 |
| 2  | Détermination des contraintes à la périphérie du volant.     |   |
| 3  | Vitesse critique de l'ensemble arbre-volant, étude statique. |   |
| 4  | Vibrations de torsion de l'ensemble tournant                 |   |
| 5  | Dispositif d'entraînement                                    |   |
| 6  | Temps et distances de freinage.                              |   |
| 7  | Adhérence au sol.                                            |   |
| 8  | Simulation du freinage sur l'appareil d'essai.               |   |
| 9  | Efforts sur le disque.                                       |   |
| 10 | Simulation d'un véhicule roulant à grande vitesse.           |   |

## B

### VERIFICATION EXPERIMENTALE DES TEMPS DE FREINAGE

- |   |                                                                                  |    |
|---|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Mesures et exploitation des résultats.                                           | 22 |
| 2 | Conclusions.                                                                     |    |
| 3 | Relation entre le coefficient de frottement et la vitesse de rotation du disque. |    |

## C

### MESURE DES DECELERATIONS

- |   |                       |    |
|---|-----------------------|----|
| 1 | Réalisation du film.  | 29 |
| 2 | Exploitation du film. |    |

- 3 Conclusions.

## D

### VIEILLISSEMENT DU DISQUE

- 1 Mesures. 36  
2 Conclusions.

## E

### USURE DES GARNITURES

- 1 Essais 57  
2 Résultats obtenus  
3 Conclusions

## F

### DISQUE EN ALLIAGE LEGER

- 1 Fabrication du disque 60  
2 Résultats des essais  
3 Conclusions

# 2

## ETUDE THERMIQUE

- Application de la thermocinétique au cas du freinage 65

## A

### ETUDE DE LA TEMPERATURE DE SURFACE

- A.1. Etude de la propagation de la chaleur par conductivité  
en milieu plan illimité avec un flux de chaleur constant  
imposé sur une face. 68  
    1.1 Partage de la chaleur  
    1.2 Formules pratiques  
A.2 Etude de la propagation de la chaleur par conductivité  
en milieu plan illimité avec un flux de chaleur linéai-  
rement décroissant. 71



2.1 Recherche du maximum de  $\Delta\theta$

2.2 Formules pratiques.

## A.2 TEMPERATURE DE SURFACE EN MILIEU LIMITE

1. Formules du milieu thermique limité. 78
  - 1.1 Calcul de  $\Delta\theta$
  - 1.2 Calcul de  $\Delta\theta$  :
    - sur la face frottante
    - sur la face dorsale (cas d'une évolution non symétrique)
  - 1.3 Calcul de  $\Delta\theta$  : dans les premiers instants du freinage au milieu du coup de frein à la fin du coup de frein.
  - 1.4 Différences chiffrées entre les températures atteintes en milieu limité et en milieu illimité.
    1. tambour de frein en fonte d'automobile
    2. disque de frein d'avion
    3. tambour de frein de moto.
  - 1.5 Vérifications expérimentales.
2. Liaison entre le milieu limité et le milieu illimité 92
  - 2.1 Détermination des écarts relatifs entre les températures des deux milieux.
  - 2.2 Application.
3. Application de cette étude au véhicule simulé. 96
  - 3.1 Calcul du flux initial.
  - 3.2 Détermination de la loi de flux.
  - 3.3 Détermination des températures de surface de contact disque-garnitures.

## **B**

### ETUDE DE $\theta(x,t)$

Méthode de calcul de  $\theta(x,t)$  en considérant le milieu limité et symétrique. Application de cette méthode au premier passage d'un point du disque devant les garnitures. 111

Conditions initiale et aux limites  
Emploi du calcul opérationnel  
Retour à l'original  
Résultat

## B.1 JUXTAPOSITION DE DEUX MILIEUX SEMI INFINIS

$\theta_{s_1}$  = constante

1 Etude du premier tour. 117

### 1.1 Premier passage devant les garnitures

Hypothèses

Conditions initiale et aux limites

Recherche de l'original

Résultat

### 1.2 Evolution de la température dans le disque à partir de l'instant où le point revient en contact avec l'air.

relation d'échange

conditions initiale et aux limites

retour à l'original

résultat

### 1.3 Résultats de cette méthode :

- $\theta(x,t)$  lors du passage du point du disque dans l'air
- $\theta(x,t)$  lors du passage du point du disque devant les garnitures.

### 1.4 Calcul de $\theta_{s_1}$

2  $\theta_{s_1}$  est une fonction linéaire du temps. 129

### 2.1 Evolution de la température dans le disque lors du premier passage devant les garnitures

### 2.2 Evolution de la température dans le disque lors du premier passage du point du disque dans l'air

conditions initiale et aux limites  
condition d'échange convectif

2.3 Evolution de la température dans le disque  
lors du  $n^e$  passage devant les garnitures.

2.4 Evolution de la température dans le disque  
lors du  $n^e$  passage dans l'air.

conditions initiale et aux limites  
condition d'échange convectif  
retour à l'original  
résultats

2.5 Détermination de la loi de variation linéaire  
de la température de surface durant cette phase  
de freinage.

2.6 Détermination des écarts de température de  
surface. Courbe représentative.

## **B.2** MILIEU LIMITE SYMETRIQUE

t compris entre  $T_1$  et T

1 Evolution de la température lors du premier passage d'un  
point du disque devant les garnitures 148

conditions initiale et aux limites  
condition de flux nul dans le plan de symétrie  
retour à l'original

2 Evolution de la température lors du premier passage du  
point du disque dans l'air après  $T_1$ .

condition d'échange convectif  
conditions initiale et aux limites  
condition de flux nul  
recherche de l'original, calcul des résidus.

3. Evolution de la température dans le disque quand le point  
viendra pour la  $m^e$  fois après  $T_1$  en contact avec les gar-  
nitures.

4. Evolution de la température dans le disque quand le point viendra pour la  $m^e$  fois après  $T_1$  en contact avec l'air.
- conditions initiale et aux limites
  - condition de flux nul
  - retour à l'original
  - résultats
5. Détermination des écarts de température de surface pendant la période  $T_1$ ,  $T$ .
6. Détermination de l'épaisseur de peau du disque.
- différence de température entre la surface et le milieu du disque:
    - . au temps  $t = T/2$
    - . au temps  $t = T$
7. Récapitulatif.

# 3

## ORGANIGRAMMES, PROGRAMMES et RESULTATS

A

Calcul de  $\theta(x,t)$  en milieu limité, symétrique (sans échange convectif).

176

- A.1 Organigramme
- A.2 Programme
- A.3 Sous programme de tracé de courbe
  - A.3.1. Organigramme
  - A.3.2. Programme
- A.4 Résultats.
  - thermogrammes topologiques
  - conclusions.

B

Calcul de  $\theta(x,t)$  en milieu limité symétrique (avec échange convectif avec le milieu ambiant).



## B.2 Sous programmes

1. - sous programme de calcul de la fonction d'erreur.
2. - sous programme de résolution de l'équation transcendante.
3. - sous programme de calcul des temps de passage devant les garnitures et dans l'air  
organigramme  
programme  
résultats

## B.2.4 Programme principal

## B.2.5 Type de programme particulier pour le calcul de la fonction d'erreur

## B.3 Résultats et conclusions.

# 4

## ESSAIS ET MESURES

### 1 Rappel des méthodes utilisables

### 2 Montage des thermocouples dans le disque

### 3 Etalonnage des thermocouples

#### 3.1 Type utilisé

#### 3.2 Montage du thermocouple de plaquette

#### 3.3 Sortie des informations

#### 3.4 Détermination des gammes de sensibilité

#### 3.5 Choix des gammes de mesures

#### 3.6 Adaptation

### 4 Résultats des essais

### 5 Disque essayé lors du second programme d'essais.

### 6 Séries d'essais pour mesurer les températures de "surface" des garnitures.

- 6.1 Montage des thermocouples
- 6.2 Première série d'essais
- 6.3 Deuxième série d'essais
- 6.4 Troisième série d'essais
- 6.5 Conclusions de ces essais

## 7 MESURE DES EMISSIONS INFRAROUGES.

263

# ANNEXES

1. Rappel des principes de thermocinétique
2. Calcul de la série  $\sum 1/n^4$
3. Calcul de la température de surface en milieu illimité à partir des formules établies en milieu limité.
4. Dépendance pour l'écart relatif de la quantité  $l^2/4at$ .
5. Etude de la fonction d'erreur, développement en série et développement asymptotique de  $\text{erfc}(x)$ .
6. Détermination de  $\theta(x,t)$  au début du freinage, dans le cas où  $s_1$  est constante.
7. Détermination de  $\theta(x,t)$  au début du freinage, dans le cas où  $s_1$  est une fonction linéaire du temps.
8. Calcul de la dérivée de  $\theta(y,t'_1)$  par rapport à  $y$  pour la valeur  $y = l'$ .
9. Recherche de l'original de la fonction: 
$$\frac{ch \ qy}{p(qshql' + \frac{h}{\lambda} chql')}$$
10. Détermination de  $\theta(y,t)$  dans la deuxième phase de freinage:
  - pendant le contact avec les garnitures
11.
  - pendant le passage dans l'air.
12. Calcul de la dérivée de  $\theta(y,t'_{2m-1})$  par rapport à  $y$  pour la valeur  $y = l'$ .
13. Détermination du coefficient de convection.
14. Mesure par thermocouples.
15. Mesure par infrarouges.

# BANC D'ESSAI

## DES FREINS A DISQUE

Le but d'un frein est de ralentir un véhicule ou une autre masse en mouvement. Lors de ce ralentissement, ce véhicule subit une diminution de son énergie cinétique, cette énergie cinétique est transformée en chaleur, cet important flux de chaleur devant être éliminé par tous les organes constituant du frein quel qu'en soit son type.

## MATERIEL D'ESSAI

### VOLANT D'INERTIE

L'appareil d'essai mis au point est essentiellement constitué d'un volant simulant un véhicule de 800 kg. Ce volant est tel que son énergie cinétique pour une certaine vitesse de rotation de l'arbre est égale au quart de l'énergie de translation du véhicule considéré. Ceci implique, en supposant que ses roues tournent à la même vitesse que celle du volant, la masse du véhicule simulé étant de 800 kg, il revient donc à chaque roue une masse:

$$m_0 = 200 \text{ kg}$$

L'énergie cinétique du véhicule est égale à:

$$E_c = 1/2 m_o V^2 \quad \begin{array}{l} m_o \text{ en kg} \\ V \text{ en m/s} \end{array}$$

Cette énergie de translation doit être transformée en énergie de rotation. L'énergie cinétique du volant équivalent est donc :

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_o V^2$$

En considérant que le rayon moyen de la roue du véhicule est de 0,26 m, et en supposant le véhicule roulant à 100 km/h on détermine l'énergie cinétique du véhicule et l'inertie du volant en respectant l'égalité entre la vitesse de rotation de la roue du véhicule simulé et celle du volant :

$$V_o = 100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \omega_o &= 27,8 / (0,26 \times 2 \times 3,14) = 16,7 \text{ tours/seconde} \\ &= 105 \text{ rd/s} \end{aligned}$$

$$I \omega_o^2 = m V^2$$

$$I = 200 \times (27,8)^2 / (105)^2 = 13 \text{ kg.m}^2$$

Si  $m_1$  est la masse du volant d'inertie, le moment d'inertie a pour expression :

$$I = m_1 R^2 / 2$$

R étant le rayon extérieur de ce volant

Prenons le rayon égal à 0,30m;

$$\begin{aligned} m_1 &= (2 \times 13) / (0,3)^2 = 290 \text{ kg} \\ &= \pi R^2 h \rho \end{aligned}$$

où h est l'épaisseur du volant

$$h = (290 \times 10^{-3}) / (7,8 \times 3,14 \times 0,09) = 0,13 \text{ m}$$

Les dimensions du volant sont donc :

|                           |
|---------------------------|
| $\phi_v = 0,60 \text{ m}$ |
| $h = 0,130 \text{ m}$     |



Il est utile que nous ayons une valeur approchée des contraintes à la périphérie du volant compte tenu de la vitesse relativement élevée atteinte lors de certains essais.

### DETERMINATION DES CONTRAINTES A LA PERIPHERIE DU VOLANT

Considérons le cas limite d'une rotation de 3 000tr/mn soit 314 rd/s . Les contraintes sont réparties de façon symétrique par rapport à l'axe de rotation.

La contrainte radiale  $\sigma_r$  et la contrainte tangentielle  $\sigma_t$  sont données par les expressions suivantes:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3+\mu}{8} \left( 1 + \alpha^2 - x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} \right) \\ \sigma_t = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3+\mu}{8} \left( 1 + \alpha^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2} \right) \end{cases}$$

x étant la distance du point considéré à l'axe du volant divisée par le rayon extérieur.

$$\begin{cases} \sigma_r \text{ est maximale pour } x = \sqrt{\alpha} = a / b \\ \sigma_t \text{ est maximale pour } x = \alpha \text{ ( en lisière du volant) } \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \sigma_{r_{\max}} = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3+\mu}{8} (1 - \alpha^2) \\ \sigma_{t_{\max}} = \frac{\gamma v^2}{g} \cdot \frac{3+\mu}{8} \left( 1 + \frac{1-\mu}{3+\mu} \alpha^2 \right) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\text{rayon intérieur}}{\text{rayon extérieur}} = \frac{a}{b}$$

$$b\omega_0 = v$$

$$\mu = \text{coefficient de Poisson} = 0,3$$

$$\gamma = 7,8 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

Compte tenu de la vitesse de rotation considérée et des dimensions du volant,

$$v = 300 \times 3,14 = 9,42 \cdot 10^2$$

$$\alpha = 30 / 300 = 0,1 = 10^{-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sigma_{r \text{ maxi}} &= 7,8 \cdot 10^{-6} (9,42)^2 \times (3 + 0,3) (1 - 10^{-2}) / 8 \times 9,81 \cdot 10^3 \\ &= 2,90 \text{ daN/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{t \text{ maxi}} = 7,06 \times 0,413 \left( 1 + \frac{0,7 \cdot 10^{-2}}{3,3} \right) = 2,98 \text{ daN/mm}^2$$

|                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{aligned} \sigma_{r \text{ maxi}} &= 29 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{t \text{ maxi}} &= 30 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Les valeurs maximales des contraintes radiales et tangentiellles sont donc faibles.

### **3** VITESSE CRITIQUE DE L'ENSEMBLE ARBRE VOLANT

Pour déterminer la masse de l'arbre, nous considérons un diamètre moyen de 50 mm et une longueur de 300 mm, longueur correspondant à la distance séparant deux paliers.

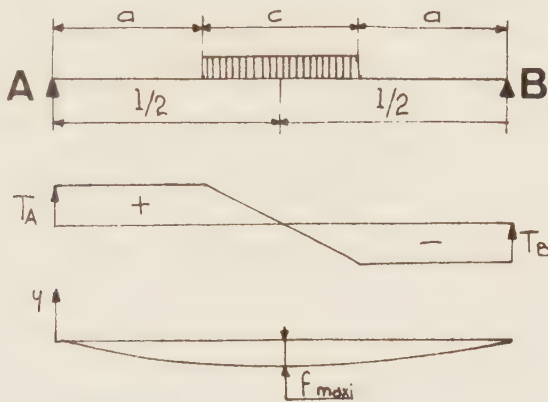
Soit  $m_a$  la masse de cet arbre

$$\begin{aligned} m_a &= \pi \frac{D^2}{4} \times \rho \times l = 3,14 \times (50 \cdot 10^{-3})^2 \times 0,3 \times 7,8 \cdot 10^3 / 4 \\ &= 4,6 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Cette masse est négligeable par rapport à celle du volant qui est de 290 kg.

## ETUDE STATIQUE

L'arbre est supporté à ses extrémités par les paliers A et B, on peut considérer que le volant monté à égale distance des paliers exerce sur lui une charge également répartie; ceci correspond au modèle suivant:



$f$  est la flèche maximale 
$$= \frac{Q}{384 EI} (8l^3 - 4lc^2 + c^3)$$

$$Q = 2900 \text{ N}$$

$$l = 300 \text{ mm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

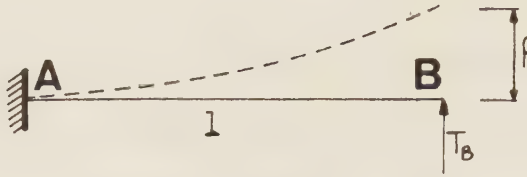
$$c = 130 \text{ mm}$$

$$I_a = \pi d^4 / 64 = 2,45 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } f &= \frac{2900}{384 \times 2,1 \cdot 10^5 \times 2,45 \cdot 10^3} (8 \times 300^3 - 4 \times 300 \times 130^2 + 130^3) \\ &= 0,55 \text{ mm} \end{aligned}$$

En fait, nous pouvons aussi considérer, en supposant que le jeu soit nul entre l'arbre et le volant, que l'alésage du volant sert d'encastrement et empêche la déformée correspondant au modèle précédent.

Le modèle équivalent suivant peut être pris en considération, où  $l$  représente la distance entre une face du volant et un des paliers.



$$T_B = 1\,450\text{ N}$$

$$l = 80\text{ mm}$$

La flèche maximale est:  $f = Pl^3/3 EI$

$$= \frac{1\,450 \times 80^3}{3 \times 2,1 \cdot 10^5 \times 2\,450} = 0,48\text{ mm}$$

Finalement, la flèche réelle maximale a une valeur comprise entre les flèches calculées avec ces deux modèles;

$$0,48 < f_0 < 0,55$$

La vitesse critique est donnée par la formule:

$$V_c = \frac{300}{\sqrt{f_0}}$$

$$\text{d'où : } 300 \cdot 10^2 / \sqrt{55} < V_c < 300 \cdot 10^2 / \sqrt{48}$$

$$4040 < V_c < 4320\text{ tr/mn}$$

La vitesse maximale atteinte lors des essais est donc très inférieure à ces valeurs.

Il faut calculer aussi la fréquence de vibration propre de torsion de l'ensemble arbre volant et disque.



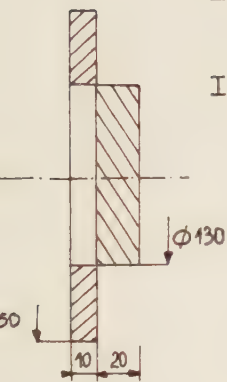
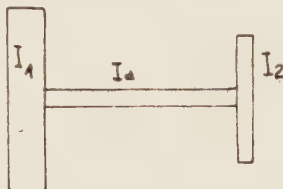
4 VIBRATIONS DE TORSION DE L'ENSEMBLE TOURNANT

Il s'agit de déterminer la pulsation propre en rotation de l'ensemble tournant afin de savoir si aux vitesses atteintes lors des essais nous ne risquons pas d'avoir l'apparition de phénomène de résonance.

L'inertie du volant et du disque sont respectivement:

$I_1 = 13 \text{ kg.m}^2$

$$I_2 = \frac{mR_i^2}{2}$$
$$= \frac{250^2 \cdot 10^{-6}}{4} \times \frac{7,8 \cdot 10^3}{2} \times \frac{\pi}{4} (250 \cdot 10^{-3})^2 \times 10^{-2} +$$
$$+ \frac{130^2 \cdot 10^{-6}}{4} \times \frac{7,8 \cdot 10^3}{2} \times \frac{\pi}{4} (130 \cdot 10^{-3})^2 \times 10^{-2}$$
$$= 7,65 (39+2,85)10^{-4} = 3,20 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$



$I_2$  est donc faible par rapport à  $I_1$

L'inertie de l'arbre est :

$l = 250 \text{ mm}$   
 $\phi_{\text{moyen}} = 50 \text{ mm}$

$I_a = \frac{1}{2} (5 \cdot 10^{-2})^4 \times 16 \times 7,8 \cdot 10^3 \times 250 \cdot 10^{-3} = 2,395 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$

Cette inertie, comme celle du disque est faible par rapport à celle du volant.

Le coefficient "de raideur" de l'arbre est déduit de l'expression:

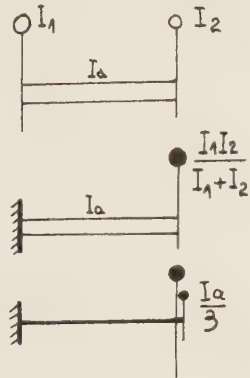
$$k = \frac{GI_o}{l}$$

où  $G$  est le module d'élasticité transversale ( $= 8,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ )  
et  $I_0$  l'inertie de l'arbre par rapport à l'axe.

$$k = 8,8 \cdot 10^{10} \times \frac{3,14}{32} (5 \cdot 10^{-2}) \times \frac{1}{250 \cdot 10^{-3}} = 21600$$

$$= 2,16 \cdot 10^4 \text{ mN/rd}$$

CALCUL DE  $\omega_0$  ( pulsation propre )



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \frac{I_0}{3}}}$$

$$= \left[ \frac{2,16 \cdot 10^4}{\frac{13 \times 3,20 \cdot 10^{-2}}{13,032} + \frac{2,395 \cdot 10^{-3}}{3}} \right]^{1/2}$$

$$\omega_0 = 661 \text{ rd/s} = 6320 \text{ tr/mn}$$

L'incertitude sur le résultat est:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{4 \Delta D}{D}$$

$$\frac{\Delta I_1}{I_1} = 10^{-2}$$

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} = 5 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{\Delta I_2}{I_2} = 5 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta I_0}{I_0} + \frac{\Delta l}{l} = 5 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta \left( \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \frac{I_0}{3} \right)}{\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \frac{I_0}{3}} \right] = 6 \cdot 10^{-2}$$

$$\omega_0 = 660 \text{ rd/s} \pm 40 \text{ rd/s}$$

$$= 6320 \text{ tr/mn} \pm 380$$

$$5940 < \omega_0 < 6700 \text{ tr/mn}$$

Ces vitesses de rotation sont éloignées de la vitesse maximale atteinte lors des essais.

Les calculs montrent que le phénomène de résonance se trouve en dehors du domaine d'utilisation du dispositif d'essai.

## 5 DISPOSITIF D'ENTRAINEMENT

Par l'intermédiaire d'un embrayage classique d'auto-mobile, ce volant est entraîné par un moteur électrique asynchrone de 12 ch ( 9 kW ) dont la vitesse nominale est de 3 000 tr/mn. Des essais à grande vitesse peuvent donc être réalisés.

En tenant compte du glissement dû au fonctionnement du moteur, on peut obtenir une rotation de l'ensemble de 2 900 tr/mn, ce qui correspond à :

$$2\,900 \text{ tr/mn} = 48,4 \text{ tr/s} = 304 \text{ rd/s}$$

soit pour la vitesse du véhicule simulé :

$$V = 304 \times 0,26 = 79 \text{ m/s} = 284 \text{ km/h}$$

La mise en vitesse du volant étant relativement longue, les freinages peuvent être simulés à toutes les vitesses ( inférieures à 284 km/h ). Il suffira pour cela de faire cesser l'action de l'embrayage au moment voulu.

Un disque de frein de série a été monté sur le même arbre que le volant ; les dimensions principales de ce disque ( de Renault R 16 ) sont :

$$\text{Diamètre extérieur} = 248 \text{ mm}$$

$$\text{Epaisseur} = 9 \text{ mm}$$

$$\text{Rayon moyen de la couronne de frottement} = 105 \text{ mm}$$

Il a fallu prévoir la fixation de l'étrier et la mise en place du circuit hydraulique de commande et des différents accessoires.

Le circuit a été fait à partir d'éléments d'automobiles de série associées à des pièces réalisées spécialement pour le banc d'essai.

Un manomètre a été installé sur le circuit pour indiquer la pression dans celui-ci et en déduire l'effort sur les plaquettes. Ces efforts peuvent être calculés théoriquement et l'expérience permettra de vérifier l'exactitude des différentes hypothèses.

## 6 TEMPS ET DISTANCES DE FREINAGE

D'après les renseignements fournis par la Régie Nationale des Usines Renault, pour une R 16, pour passer de 100 km/h à 0 km/h, il faut 3,0 secondes.

Les expressions de la vitesse et de la distance parcourue,

$$V = \gamma t$$

$$x = \gamma t^2 / 2$$

en tenant compte des conditions aux limites,

|         |                                            |                                                             |
|---------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| origine | $\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ | début du freinage: $t = 0 \rightarrow V = 27,8 \text{ m/s}$ |
|         |                                            | $t = 3 \rightarrow V = 0$                                   |

permettent d'évaluer la décélération:

$$\gamma = - 9,26 \text{ m/s}^2$$

La distance parcourue par le véhicule du début du freinage à l'arrêt complet est:

$$x = \frac{1}{2} \times 9,26 \times 3^2 = 41,70 \text{ m}$$

Pour une vitesse initiale de 100 km/h ( 27,8 m/s ), le freinage est caractérisé par les grandeurs suivantes:

|                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------|
| $t = 3 \text{ s}$<br>$\gamma = - 9,26 \text{ m/s}^2$<br>$x = 41,70 \text{ m}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------|

## COUPLE DE FREINAGE

Il faut donc obtenir une décélération de  $- 9,26 \text{ m/s}^2$  avec les données suivantes:

$$F = m|\gamma|$$

$$m = 800 \text{ kg}$$

On en déduit l'effort sur une roue;

$$F_o = m_o \gamma = 200 \times 9,26 = 1\,852 \text{ N}$$

en supposant qu'un quart de la charge est affecté au moyeu considéré.

$R_o$  étant la distance de l'axe de la roue à la chaussée ( = au rayon de roulement =  $0,26\text{m}$  ), le couple a pour valeur:

$$F_o R_o = 1\,852 \times 0,26 = 481 \text{ mN} = 48,1 \text{ mdaN}.$$

Ceci suppose qu'il n'y a pas de glissement du pneumatique sur la chaussée, c'est à dire que le coefficient d'adhérence au sol est égal à 1 .

## ADHERENCE AU SOL

Si  $P$  est le poids supporté par la génératrice de contact et  $f$  le coefficient d'adhérence, la formule de l'adhérence au sol est :

$$A = P \cdot f$$

Dans le cas considéré où  $\gamma = - 9,26 \text{ m/s}^2$

$$P = 200 \times 9,81 = 1\,962 \text{ N}$$

il en résulte:

$$f = \frac{1\,852}{1\,962} = 0,945$$



Pratiquement f prend les valeurs suivantes:

|             |                                      |
|-------------|--------------------------------------|
| 0,85 à 0,95 | sur revêtement bitumeux rugueux sec  |
| 0,70 à 0,85 | sur revêtement bitumeux lisse sec    |
| 0,6 à 0,7   | sur pavés secs                       |
| 0,4 à 0,5   | sur revêtement bitumeux lisse humide |
| 0,3 à 0,4   | sur pavés humides                    |
| 0,1         | sur la boue                          |
| 0,05        | sur le verglas                       |

Le coefficient théorique de 0,945 correspond à la limite des valeurs pratiques de f.

On admet que la décélération est CONSTANTE durant le temps de freinage.

Cette hypothèse est justifiée par les résultats obtenus par le "ROAD RESEARCH LABORATORY" sur une voiture freinant depuis 30 km/h et depuis 80 km/h. Les graphiques obtenus par le R.R.L. sont représentés sur la page suivante.

## 8 SIMULATION DU FREINAGE SUR L'APPAREIL D'ESSAI

Le couple de freinage a pour expression :

$$C_f = I \frac{d\omega}{dt}$$

I étant l'inertie du volant ( = 13 kg m<sup>2</sup> )

Le volant tournant à 107 rd/s, on applique un couple de freinage de 481 mN durant trois secondes, ceci provoque une décélération de 9,26m/s<sup>2</sup> correspondant au freinage maximum ( en limite d'adhérence ) d'une voiture de 800 kg roulant à 100 kilomètres heure.

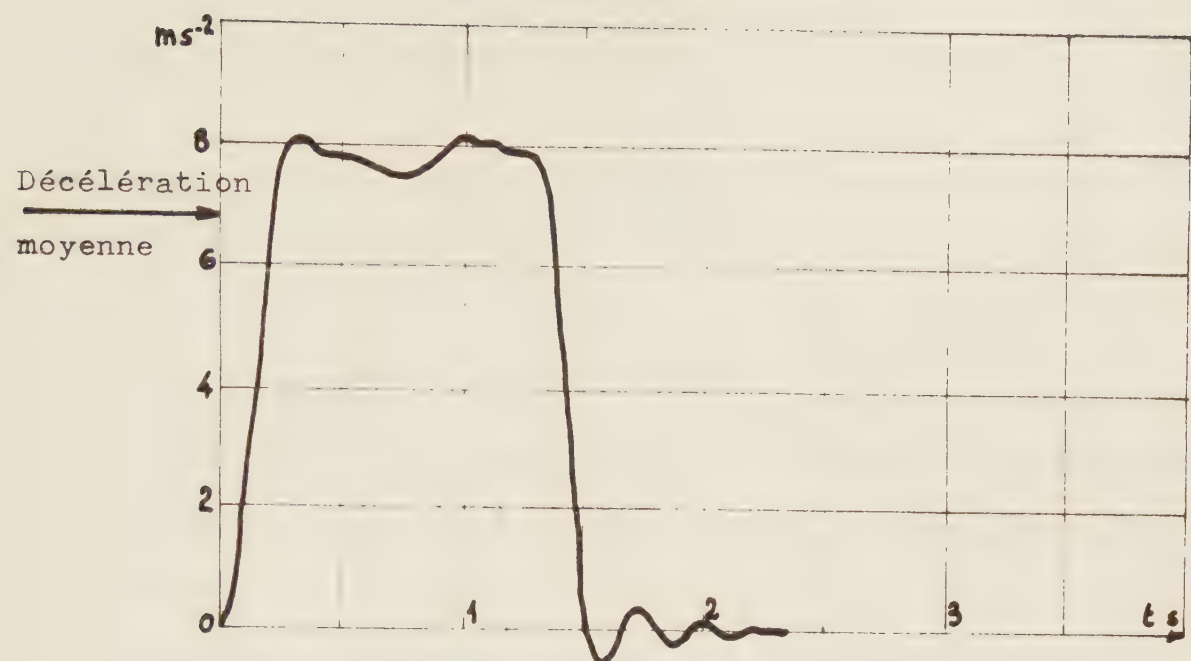


Diagramme de décélération d'une voiture freinant à partir de 30 km/h. Les variations finales sont dues au balancement du véhicule.

( Document ROAD RESEARCH LABORATORY )

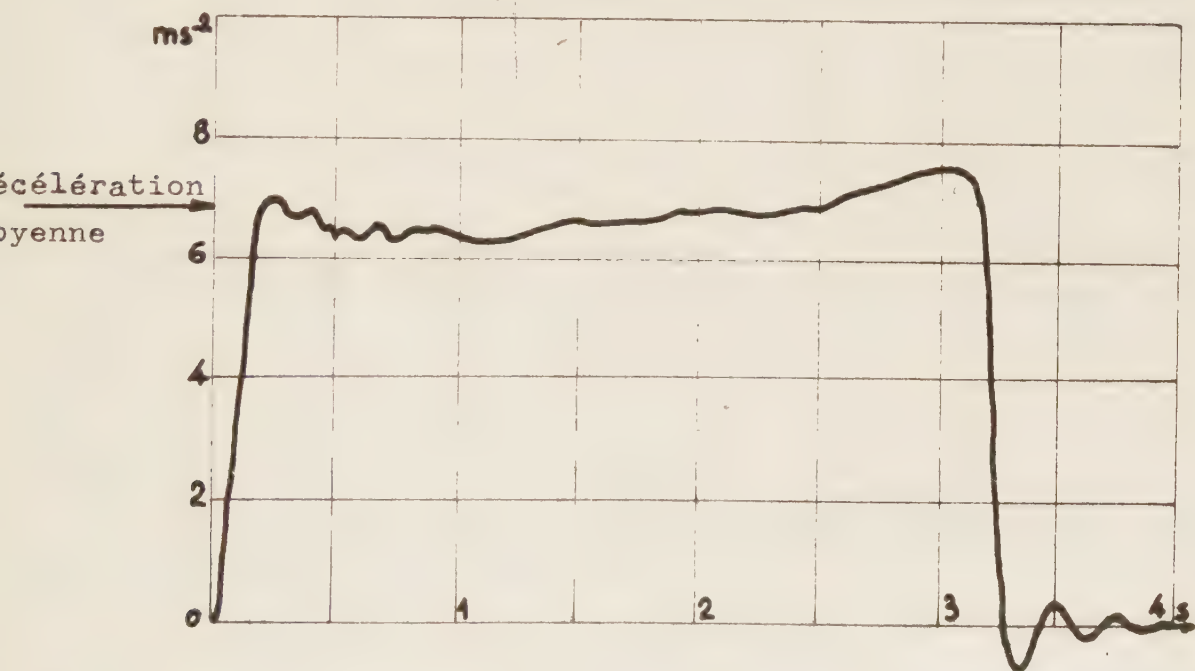


Diagramme de décélération pour un véhicule freinant à partir de 80 km/h.

Le rayon d'action des plaquettes sur le disque est :

$$r_a = 105 \text{ mm}$$

ce qui donne une composante tangentielle de l'effort résultant sur le disque égale à :

$$T = \frac{C_f}{r_a} = 481 / 105 \cdot 10^{-3} = 4\,580 \text{ N}$$

La composante normale de cet effort est :

$$N = \frac{T}{\operatorname{tg} \alpha} = 4\,580 / \operatorname{tg} \alpha$$

La valeur moyenne du coefficient de frottement entre la fonte et les garnitures étant de 0,3, la valeur de la composante normale est :

$$N = 4\,580 / 0,3 = 15\,300 \text{ N}$$

La surface de frottement des garnitures est de  $34 \text{ cm}^2$  soit  $68 \text{ cm}^2$  pour la surface totale de contact.

La pression sur les garnitures au niveau du rayon d'action est :

$$15\,300 / 68 = 228 \text{ N/cm}^2$$

Le diamètre de l'alésage du cylindre récepteur du frein étudié est de 48 mm. La surface du piston est donc de :

$$S = \pi (48)^2 / 4 = 1\,810 \text{ mm}^2 = 18,10 \text{ cm}^2$$

Pour avoir un effort normal de 15 300 N, il est nécessaire d'avoir dans le cylindre récepteur une pression de :

$$p = 15\,300 / 2 \times 18,10 = 423 \text{ N/cm}^2 \approx 42 \text{ bars}$$

Un manomètre branché à la sortie du maître-cylindre permet de contrôler l'effort de freinage et de se replacer dans les mêmes conditions à chaque essai.

### SIMULATION D'UN VEHICULE DE 800 kg ROULANT A GRANDE VITESSE

L'appareil d'essai est entraîné par un moteur dont la vitesse nominale théorique est de 3 000 tr/mn ( en considérant que le glissement est nul ). Pratiquement, au cours des essais la vitesse maximale atteinte est de 2 900 tr/mn.

$$\text{soit: } \omega = \frac{2\,900}{60} \times 2\pi = 304 \text{ rd/s}$$

En conservant un rayon de roulement de 0,26m, la vitesse du véhicule simulé est donc:

$$\begin{aligned} V &= \omega \times r_a \\ &= 304 \times 0,26 = 79 \text{ m/s} = 284 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Au fur et à mesure des essais il nous sera de plus en plus difficile d'atteindre des vitesses de rotation du disque proches de la vitesse nominale du moteur en raison de l'usure du disque d'embrayage qui sert au démarrage du volant puis à sa montée en vitesse.

Cette vitesse étant facilement mesurable, nous allons établir un tableau de correspondance :

| n     | $\omega$ | V m/s | V km/h | t s  | distance<br>d'arrêt |
|-------|----------|-------|--------|------|---------------------|
| 3 000 | 314      | 81,6  | 294    | 8,8  | 360                 |
| 2 900 | 304      | 79    | 284    | 8,5  | 335                 |
| 2 800 | 293      | 76,5  | 275    | 8,25 | 316                 |
| 2 700 | 283      | 73,5  | 264    | 7,9  | 290                 |
| 2 600 | 272      | 70,7  | 255    | 7,6  | 267                 |
| 2 500 | 262      | 68    | 245    | 7,35 | 250                 |
| 2 400 | 252      | 65,5  | 236    | 7,05 | 230                 |
| 2 300 | 241      | 62,7  | 226    | 6,75 | 210                 |
| 2 200 | 230      | 59,8  | 215    | 6,5  | 195                 |
| 2 100 | 220      | 57,2  | 205    | 6,15 | 175                 |
| 2 000 | 210      | 54,6  | 197    | 5,8  | 156                 |
| 1 800 | 189      | 49,1  | 177    | 5,3  | 130                 |
| 1 600 | 168      | 43,6  | 157    | 4,7  | 102                 |
| 1 400 | 147      | 38,2  | 138    | 4,1  | 78                  |
| 1 200 | 126      | 32,8  | 118    | 3,5  | 57                  |
| 1 000 | 105      | 27,3  | 98     | 2,8  | 36,5                |
| 800   | 84       | 21,8  | 78,5   | 2,35 | 25,5                |

Temps de freinage :  $t = V / \gamma$

Distance parcourue :  $x = 1/2 \gamma t^2$

La vitesse maximale que nous pouvons espérer obtenir est de 2 900 tr/mn soit 304 rd/s et 79 m/s. Pour cette vitesse le temps de freinage avec une décélération de  $9,26 \text{ m/s}^2$  est de 8,5 secondes.



## TEMPS DE FREINAGE

La vérification de ces temps est relativement simple. Pour cela il faut posséder un tachymètre et un chronomètre.

Pour simuler les freinages dans les différents cas il suffit de faire cesser l'action de l'embrayage quand la vitesse désirée est atteinte.

Tous ces essais ont été faits dans les mêmes conditions de pression. En effet grâce au manomètre, les efforts de freinage sont les mêmes pour chaque essai. Pour pouvoir comparer ces temps d'arrêt avec ceux obtenus par le calcul, la pression dans le circuit hydraulique était maintenue à 42 bars.

Pour avoir des résultats comparables à chaque expérience, il faut que la température du disque et des garnitures soit la même au début de chaque essai. Ces essais doivent être suffisamment espacés dans le temps pour que le disque puisse se refroidir correctement.

En raison des difficultés de mise en vitesse du volant, des mesures d'usure de plaquettes ont été faites après chaque essai.

En procédant de cette manière les résultats suivants ont été obtenus :

la vitesse de rotation est exprimée en tr/mn, et les temps d'arrêt en secondes.

| Vitesse de rotation | Temps d'arrêt |
|---------------------|---------------|
| 800                 | 2 s           |
| 1 000               | 2 s 3/10      |
| 1 200               | 3 s 2/10      |
| 1 400               | 3 s 8/10      |
| 1 600               | 4 s 5/10      |
| 1 800               | 5 s           |
| 2 000               | 5 s 8/10      |
| 2 200               | 6 s 7/10      |
| 2 300               | 7 s 1/10      |
| 2 400               | 7 s 4/10      |
| 2 500               | 8 s 3/10      |
| 2 600               | 8 s 7/10      |
| 2 700               | 8 s 9/10      |
| 2 800               | 9 s 5/10      |
| 2 900               | 9 s 8/10      |

Ces valeurs nous permettent de tracer la courbe de la page suivante.

## 1 EXPLOITATION DES RESULTATS

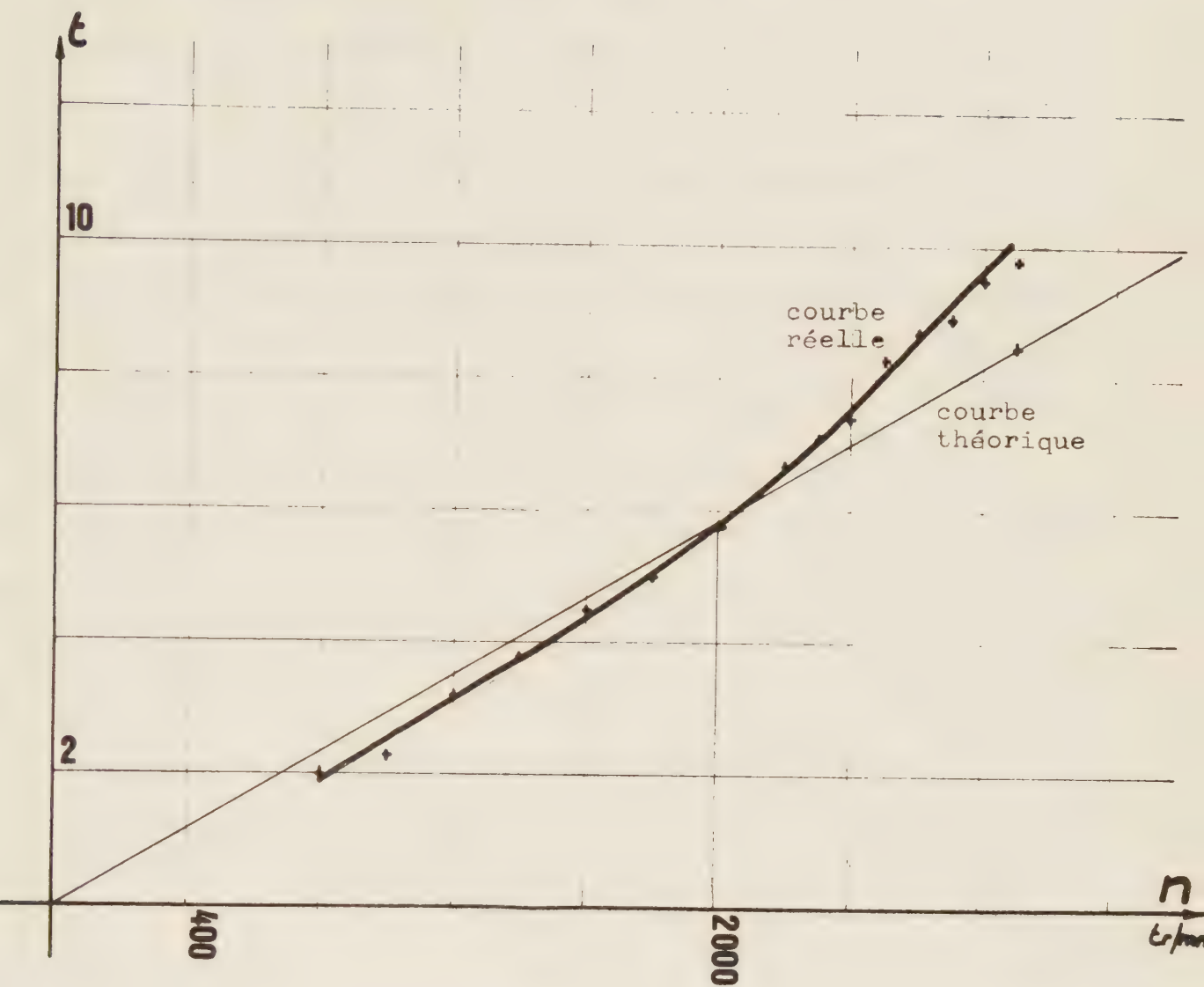
On remarque tout d'abord sur le graphique précédent que la courbe réelle s'écarte de la courbe théorique vers les grandes vitesses; on peut donc penser que certaines hypothèses de base ne sont plus vérifiées.

Les temps de freinage ont été calculés à partir de:

- l'effort appliqué par le piston récepteur sur les plaquettes. (le couple de freinage)
- le coefficient de frottement fonte-garniture.
- la décélération supposée constante.

L'effort appliqué est toujours le même à chaque essai donc n'entre pas en ligne de compte dans la variation.

# TEMPS DE FREINAGE



La décélération a été supposée constante pendant toute la durée du freinage. Pour un véhicule freinant depuis 285 km/h , on ne peut rigoureusement pas dire que cette hypothèse est encore valable. En effet, pendant toute la phase de freinage le disque est porté superficiellement au rouge, il est donc logique de penser que certains paramètres sont modifiés à température élevée.

La première idée est que le coefficient de frottement fonte-garniture varie avec la température quand celle-ci dépasse une certaine valeur. Cette variation du coefficient de frottement serait donc la cause d'une variation de la décélération et par là même, de l'augmentation des temps d'arrêt.

L'observation du disque en cours d'essai peut faire penser que la température de la surface de frottement prend sa valeur maximale à un instant très proche du début du freinage. L'énergie transformée en chaleur faisant ensuite augmenter la température au coeur du disque.

Si on fait cette hypothèse, on peut calculer un nouveau coefficient de frottement qui nous donnera une valeur moyenne de celui-ci pendant l'essai considéré.

CALCUL DE  $\phi = \operatorname{tg} \alpha$

$$t = 9,8 \text{ s} \qquad p = 42 \text{ bars}$$

$$n = 2\,900 \text{ tr/mn} \quad \omega = 304 \text{ rd/s}$$

Rayon moyen de la roue du véhicule = 0,26m

$$V = 304 \times 0,26 = 79 \text{ m/s} \quad (V = \text{vitesse linéaire})$$

Décélération correspondant au temps de 9,8s.

$$V = \gamma t$$

$$\gamma = V / t = -79/9,8 = -8,05 \text{ m/s}^2$$

Effort de freinage nécessaire

$$F = m|\gamma| = 200 \times 8,05$$

Couple de freinage

$$C_f = 1610 \times 0,26 = 418 \text{ mN} = 41,8 \text{ mdaN}$$

Le rayon d'action des plaquettes étant toujours  $r_a = 105 \text{ mm}$ , la composante tangentielle de l'effort sur le disque est de :

$$T = 418/105.10^{-3} = 3980 \text{ N}$$

Pour une plaquette, cette composante vaut donc :

$$3980 / 2 = 1990 \text{ N}$$

L'effort normal appliqué par le piston récepteur sur les plaquettes est de :

$$p = 42 \text{ b} \quad s = 18,10 \text{ cm}^2$$

$$N = 42.10^5 \times 18,10.10^{-4} = 7600 \text{ N}$$

D'où le coefficient de frottement pour l'essai considéré :

$$\phi = \text{tg} \alpha = 1990/7600 = 0,26$$

Variation relative de ce coefficient:

$$\frac{\Delta \phi}{\phi} = (0,3 - 0,26) / 0,3 = 0,13 = 13\%$$

## 2 CONCLUSIONS

L'hypothèse  $\text{tg} \alpha = 0,3$  reste valable pour des vitesses ne dépassant pas 2000 tr/mn soit 200 km/h environ.



Au dessus de cette valeur de la vitesse on remarque que les temps de freinage augmentent. A 285 km/h, il augmente d'environ 15 % , ce qui n'est pas négligeable.

En effet la distance parcourue en 9,8s est de:

$$x = 1/2 \gamma t^2$$

$$= 1/2 \times 8,05 \times 9,8^2 = 387 \text{ m}$$

alors que les calculs théoriques donnaient une distance d'arrêt de 335 m.

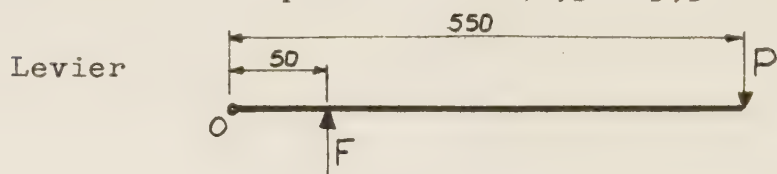
Malgré la difficulté de mesurer avec précision les temps d'arrêt, le nombre de points relevés donne toutefois le graphique représenté précédemment qui est exploitable.

On peut envisager la réalisation d'un système permettant d'avoir une pression constante dans le circuit tout au long de l'essai. On peut placer à l'extrémité du levier une série de poids donnant la pression désirée.

Piston du maître cylindre :

$$\phi = 20,5 \text{ mm} \quad S = 330 \text{ mm}^2 = 3,3 \text{ cm}^2$$

$$\text{Effort sur le piston: } F = 42,3 \times 3,3 = 140 \text{ daN}$$



Effort P à appliquer à l'extrémité du levier:

$$P = 140 \times 50 / 550 = 12,7 \text{ daN}$$

Avec ce dispositif, l'opérateur n'aura plus qu'à mesurer à l'aide du chronomètre les différents temps de freinage et n'aura plus besoin de contrôler simultanément la pression dans le circuit.

### 3 RELATION ENTRE LE COEFFICIENT DE FROTTEMENT ET LA VITESSE DE ROTATION DU DISQUE

Le calcul précédent nous permet d'établir une relation entre  $\tan \alpha = \phi$  et  $n$  la vitesse de rotation du disque.

Nous avons :

$$t = V / \gamma = (2 \eta n R_o) / (60 \gamma)$$

L'effort tangentiel a pour expression :

$$T = \frac{C_f}{r_a} = N \cdot \phi = F R_o / r_a = m_o \gamma R_o / r_a \quad \phi = m_o \gamma R_o / N r_a$$

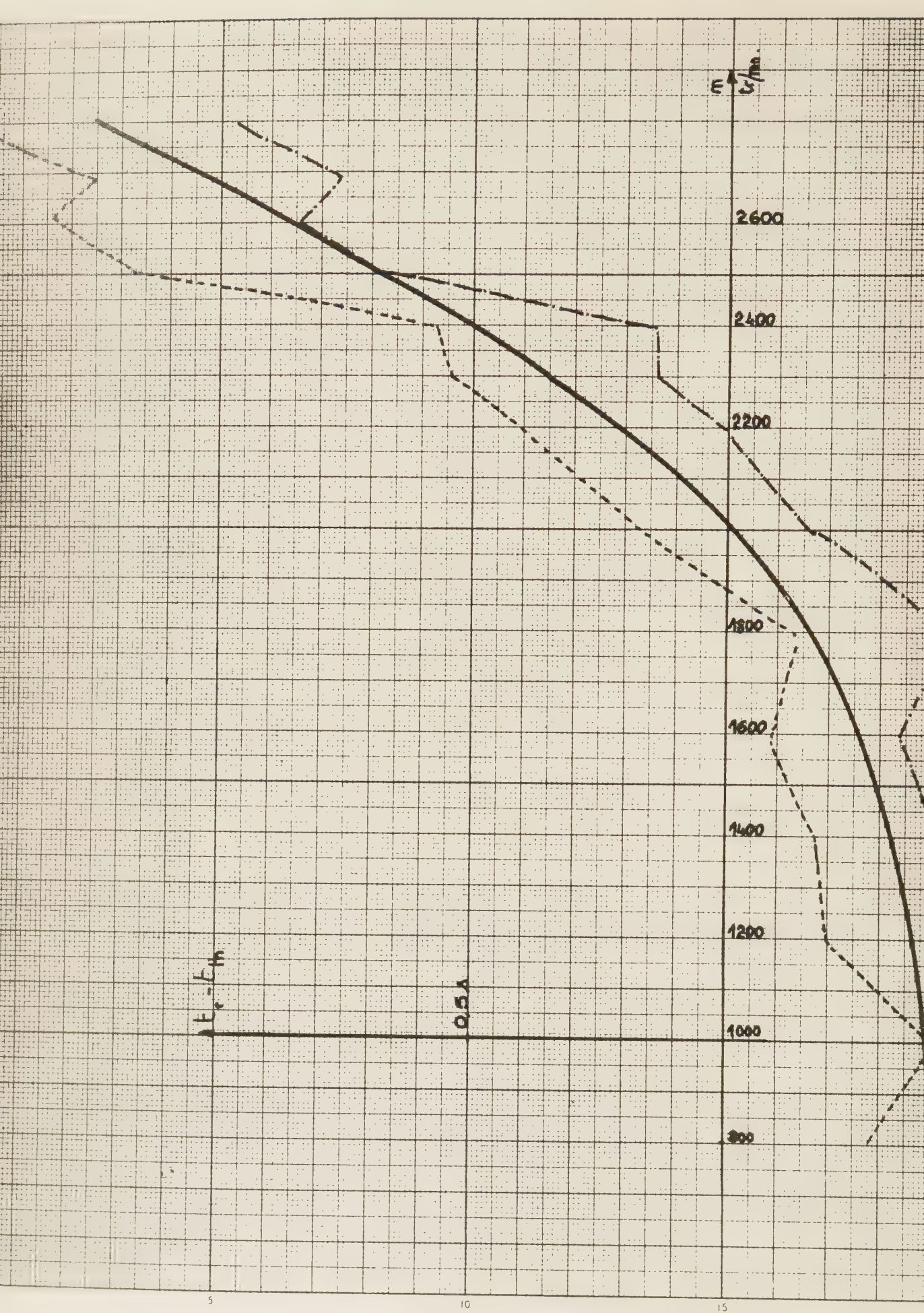
$N$  étant l'effort normal appliqué sur le disque par une garniture.

$$\text{d'où : } t = \eta n \cdot R_o^2 \cdot m_o / 30 \cdot \phi \cdot N \cdot r_a \implies \phi = \eta n \cdot R_o^2 \cdot m_o / 30 \cdot N \cdot r_a \cdot t$$

Traçons la courbe permettant de visualiser les écarts entre les temps réels de freinage et les temps théoriques ; fig

En tenant compte de l'erreur commise lors de la mesure et lors de l'établissement des calculs donnant les temps théoriques, la précision est de l'ordre de 3/100 environ.

De la courbe obtenue, nous pouvons en déduire une relation donnant les temps réels pour des vitesses de rotation comprises entre 800 et 3 000 tr/mn :



$$t_{\text{réel}} = \frac{\eta R_o \cdot n}{30 \gamma} \left[ 1 + \frac{e^{(n-2000)/665} - 1}{4 \cdot 10^{-2} n} \right]$$

Ceci nous permet d'obtenir pour la fonction  $\phi = \text{tg}$  la relation suivante :

$$\phi = R_o \cdot m_o \cdot \gamma / N \cdot r_a \cdot \left[ 1 + \frac{e^{(n-2000)/665} - 1}{4 \cdot 10^{-2} n} \right]$$

Cette formule est établie uniquement pour le type de garniture utilisée lors de ces essais. Nous obtenons alors comme expression de  $\phi$  :

$$\phi = 0,3 / \left( 1 + \frac{e^{(n-2000)/665} - 1}{4 \cdot 10^{-2} n} \right)$$

n étant exprimé en tr/mn

## C MESURE DES DECELERATIONS

L'appareillage a été complété par une caméra ultra rapide. L'enregistrement à 1 000 images par seconde, au cours de freinage à partir de la vitesse de 2 900 tr/mn, a permis de préciser les conditions de décélération.

### 1 REALISATION DU FILM

La caméra grande vitesse est utilisée avec un objectif de 35 mm et à la distance minimale possible avec cet objectif, c'est à dire 1,10 m. Cet objectif a été choisi afin que le disque soit entièrement dans le champ de prise de vue.



La vitesse de défilement est de 1 000 images par seconde. Elle a été choisie compte tenu de la sensibilité du film qui est de 320 A.S.A.

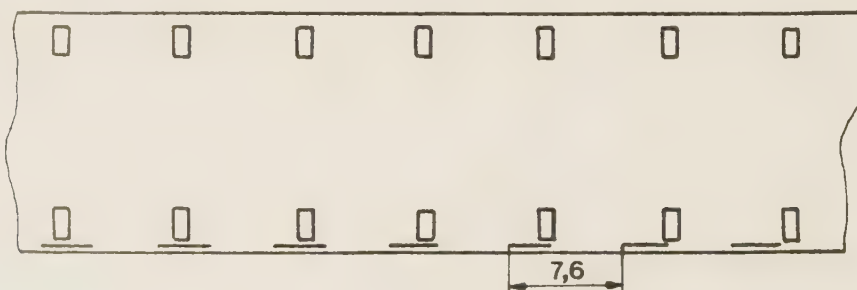
L'éclairage du disque est assuré par deux projecteurs de 650 W et de 1 000 W. Dans ces conditions l'ouverture du diaphragme correspond au repère 4. Un trait de repérage a été tracé sur le moyeu du disque.

## 2 EXPLOITATION DU FILM

La lumière émise par le disque quand il est porté à température élevée n'a pas impressionné le film. Cependant on peut utiliser celui-ci pour mesurer les décélérations obtenues au cours du freinage car le trait repère tracé sur le moyeu a impressionné la pellicule.

Pour cela il faut :

- Rechercher les premières images prise effectivement à 1 000 images par seconde. (l'inertie des parties mobiles de la caméra empêche la mise en vitesse instantanée du film). La cadence de prise de vue est atteinte quand les tirés marqués sur le film par la base de temps sont espacés de 7,6 mm.





Dans ces conditions, les mesures commencent en cours de freinage et le point 0 sera pris à l'instant où le film a atteint une vitesse de défilement correcte.

- a ce moment là, on compte le nombre d'images prises pendant que le disque fait un tour et on en déduit la vitesse de celui-ci. On peut considérer que l'on obtient une vitesse instantanée car le disque met de deux à quatre centièmes de seconde pour faire un tour.

On se déplace sur le film d'une quantité égale à 100 images, ce qui correspond à 1/10 de seconde et on détermine la nouvelle vitesse du disque à cet instant. La décélération moyenne du disque pendant 1/10 de seconde est déduite de ces mesures.

$$\gamma = \Delta v / t$$

La succession des mesures permet de tracer  $\gamma$  en fonction du temps.

#### REMARQUE

Au début du freinage, le disque tourne à 2 850 tr/mn ( $\omega = 298$  rd/s). La pression dans le circuit hydraulique est de 60 bars.

Dans les conditions précédentes, au point 0, on observe 22 images pour une rotation de un tour du disque.

$$\omega = 2\pi \cdot 10^3 / 22 = 286 \text{ rd/s}$$

$$v = 286 \times 0,26 = 74,3 \text{ m/s}$$

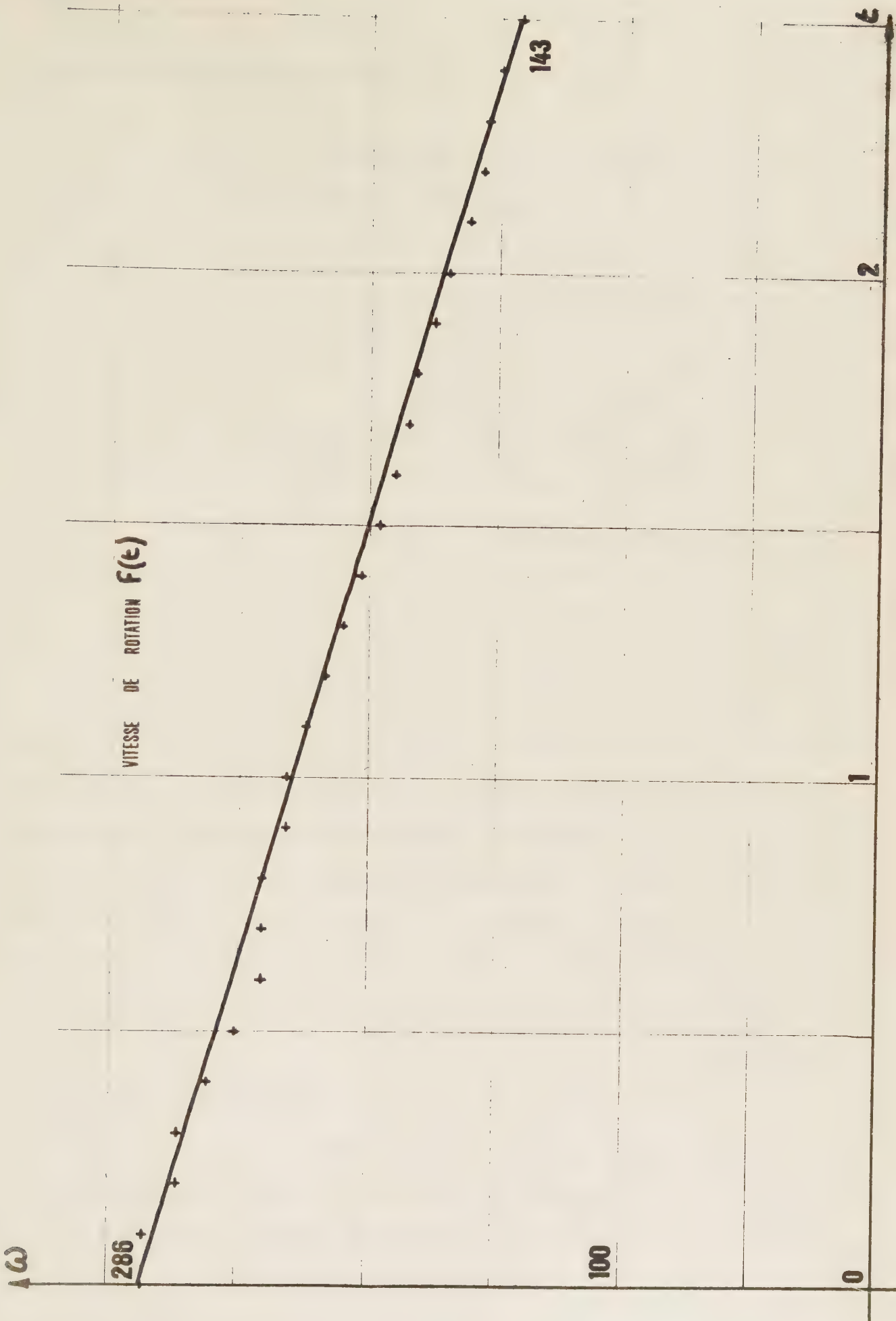
A partir de ce point, les vitesses ont été relevées de 1/10 en 1/10 de seconde.

| $t = 0s$ | $= 286 \text{ rd/s}$ | $V = 74,3m/s$ |
|----------|----------------------|---------------|
| 0,1      | 286                  | 74,3          |
|          | 273                  | 71            |
|          | 273                  | 71            |
|          | 263                  | 68,1          |
| 0,5      | 251                  | 65,2          |
|          | 241                  | 62,6          |
|          | 241                  | 62,6          |
|          | 240                  | 62,5          |
|          | 232                  | 60,3          |
| 1        | 232                  | 60,3          |
|          | 224                  | 58,2          |
|          | 217                  | 56,4          |
|          | 209,5                | 54,5          |
|          | 203                  | 52,7          |
| 1,5      | 196                  | 51            |
|          | 190                  | 49,4          |
|          | 185                  | 48,1          |
|          | 182                  | 47,3          |
|          | 175                  | 45,5          |
| 2        | 170                  | 44,2          |
|          | 162                  | 42,1          |
|          | 157                  | 40,8          |
|          | 155                  | 40,3          |
|          | 149,5                | 38,9          |
| 2,5      | 143                  | 37,2          |

Les films utilisés ont une longueur de 30 m, c'est la raison pour laquelle les mesures n'ont été faites que sur 2,5 secondes.

### 3 CONCLUSIONS

Pendant les 2,5 secondes durant lesquelles on a pu contrôler la vitesse, celle-ci décroît linéairement avec le



temps. Donc la décélération est constante pendant cette période.

$$\text{Sur } 2,5 \text{ s} \quad \Delta\omega = 143 \text{ rd/s}$$

$$\Delta V = 143 \times 0,26 = 37,2 \text{ m/s}$$

$$\gamma = 37,2 / 2,5 = 14,9 \text{ m/s}^2$$

Nous connaissons l'effort de freinage.

$$p = 60 \text{ bars} \quad N = 60 \times 18,10 = 10\,860 \text{ N}$$

Couple de freinage

$$C_f = 200 \times 14,9 \times 0,26 = 775 \text{ mN}$$

Effort tangentiel sur le disque:

$$T = 775 \cdot 10^3 / 105 = 7\,400 \text{ N}$$

Pour une plaquette:

$$T_1 = 7\,400 / 2 = 3\,700 \text{ N}$$

D'où le coefficient de frottement correspondant :

$$\phi = \text{tg} \alpha = 3\,700 / 10\,860 = 0,34$$

Il faut remarquer que ces mesures ont été effectuées au début du freinage. En comparant cette valeur du coefficient de frottement avec celles trouvées au cours de la vérification expérimentale des temps de freinage, il apparaît une différence.

Cette différence est surtout sensible sur les décélérations. Il existe une différence notable entre la décélération moyenne calculée sur 2,5 s et celle correspondant à tout le freinage.

On peut donc penser que la valeur de  $\gamma$  n'est pas constante pendant toute la durée de l'essai et que celle-ci varie en fin de freinage. On peut penser que la température relativement élevée des surfaces frottantes fait varier le coefficient de frottement et par là même, la décélération.

## VIEILLISSEMENT DU DISQUE

Après une série d'environ vingt freinages effectuée dans les conditions décrites précédemment ( $n = 2\ 900$  tr/mn ,  $p = 42$  bars), on remarque que le disque présente un certain nombre de traces radiales sombres régulièrement réparties sur toute la surface de frottement de celui-ci. Ces traces s'étendent sur toute la largeur de cette surface. Elles sont en outre, parfaitement visibles sur les dernières vues du film réalisé à grande vitesse ( 1 000 images par seconde ).

Le disque a été démonté afin de permettre une observation approfondie.

Tout d'abord, on remarque que par endroit des particules carbonisées de matière constituant les plaquettes, se collent sur certaines parties du disque.

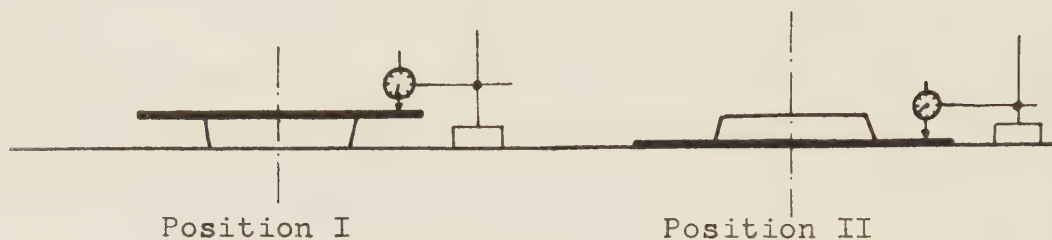
On observe aussi deux fissures distantes d'environ 10 mm qui se propagent radialement à la surface de la couronne de frottement. Ces fissures n'apparaissent pas de l'autre côté et on peut donc penser qu'il ne s'agit que d'un défaut superficiel. Ces fissures ont été vraisemblablement provoquées par les brusques variations de température régnant à ce niveau et témoignent de la déformation du disque due à l'amplitude des contraintes thermiques.

Des mesures plus précises ont été faites pour pouvoir comparer les déformations d'un disque neuf et celles d'un disque ayant servi à faire une série de freinages.



## 1 MESURES

Des mesures de déformation ont été effectuées en prenant plusieurs surfaces de référence dans les positions suivantes :

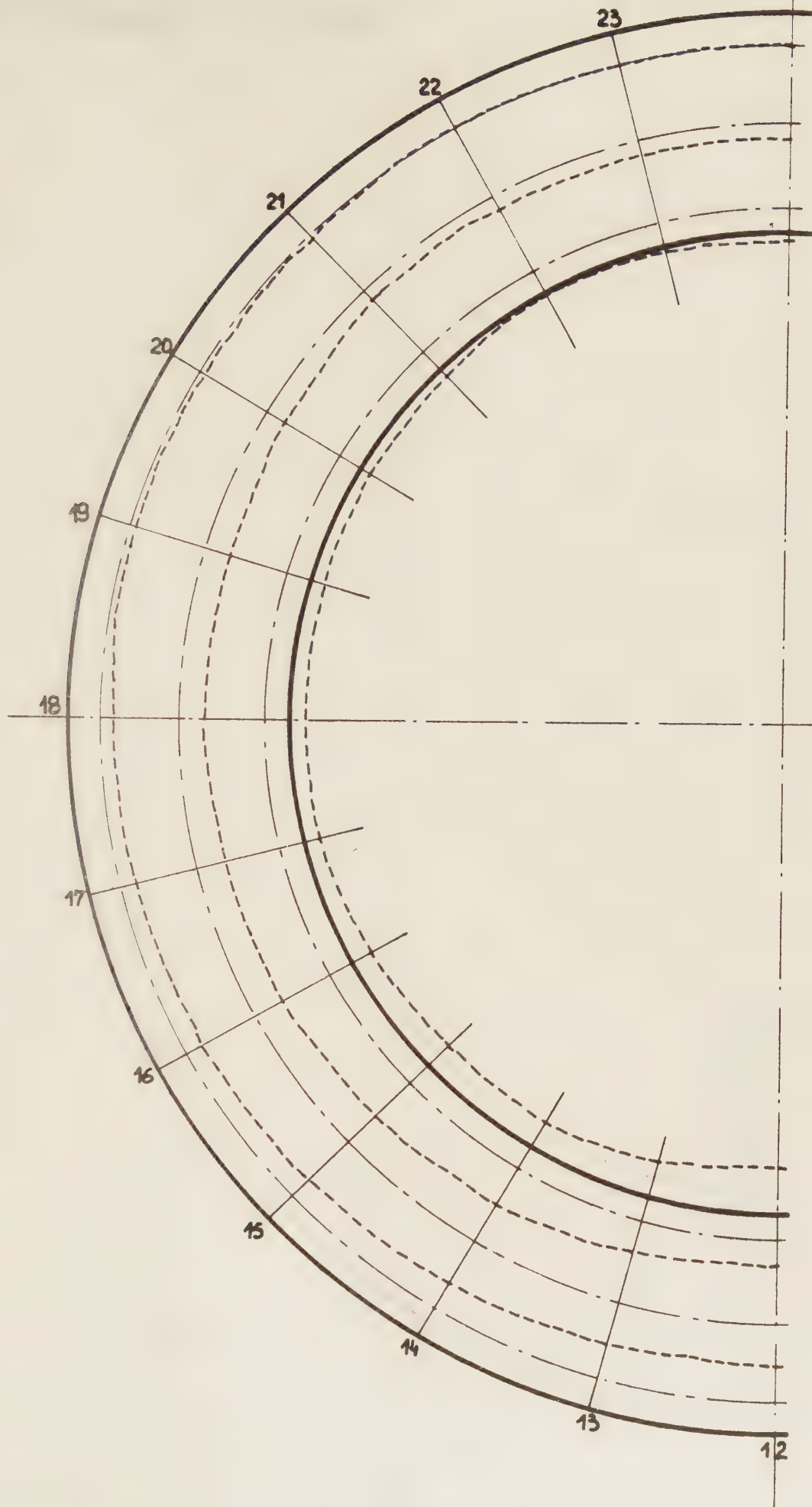


Le disque décrit précédemment est un disque d'origine "Renault".

Les altitudes des différents points de la surface de frottement ont été relevées dans les conditions suivantes :

- Choix d'une surface de référence : face d'appui pour la position I, face de frottement pour la position II.
- Choix d'un point 0 qui sert de comparaison pour toutes les autres mesures.
- Par rapport à ce point, on relève les altitudes des points répartis sur des rayons décalés de  $15^\circ$  entre eux et sur des circonférences ayant respectivement 120, 105 et 90 mm de rayon (voir figure A).

Sur cette courbe, les altitudes, par rapport au point 0, ont été portées à partir des circonférences correspondant aux rayons donnés ci-dessus. La courbe A correspond à des relevés effectués dans la position I.



# DISQUE "RENAULT" NEUF

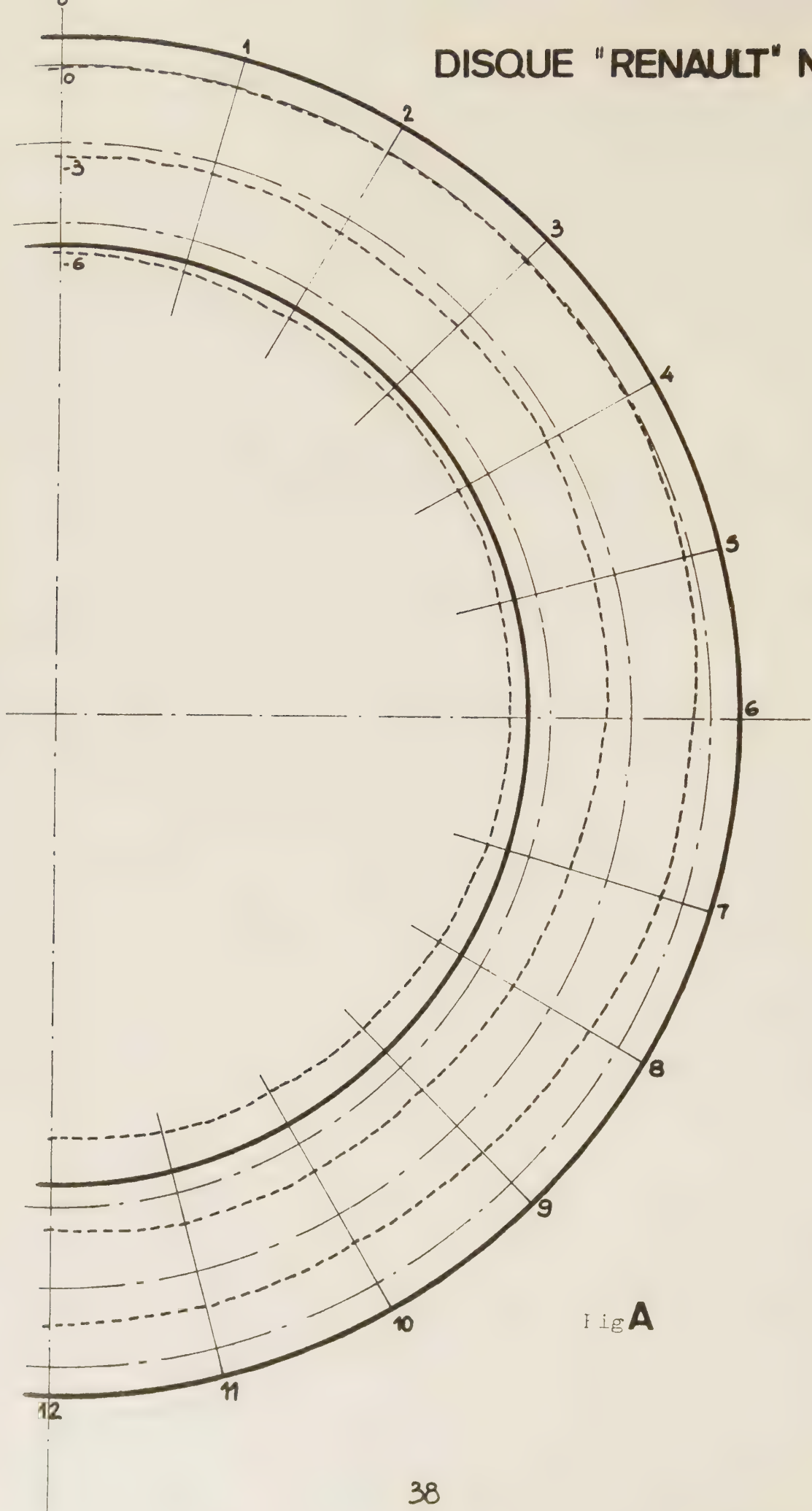
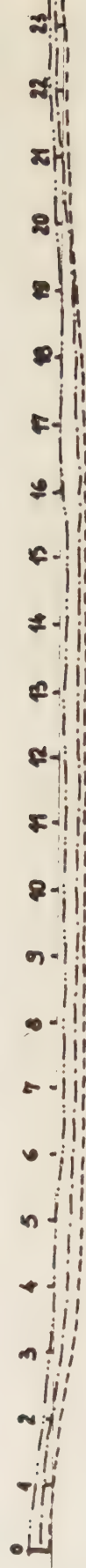


Fig **A**

DISQUE "RENAULT" NEUF



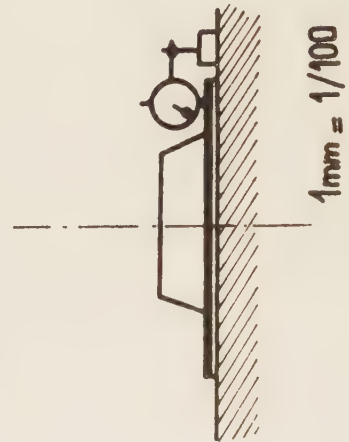
Variations des relevés suivant les 3 rayons

- DEVELOPPEMENTS -

--- r = 120

--- r = 105

--- r = 90



# DISQUE " RENAULT " NEUF



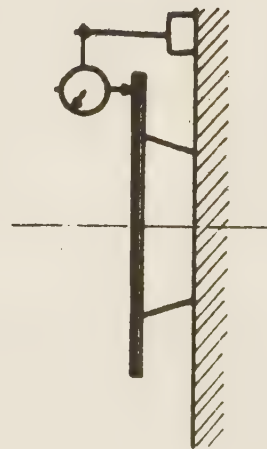
Variations des relevés suivant les 3 rayons

- DEVELOPPEMENTS -

----- r = 120

- . - . - . r = 105

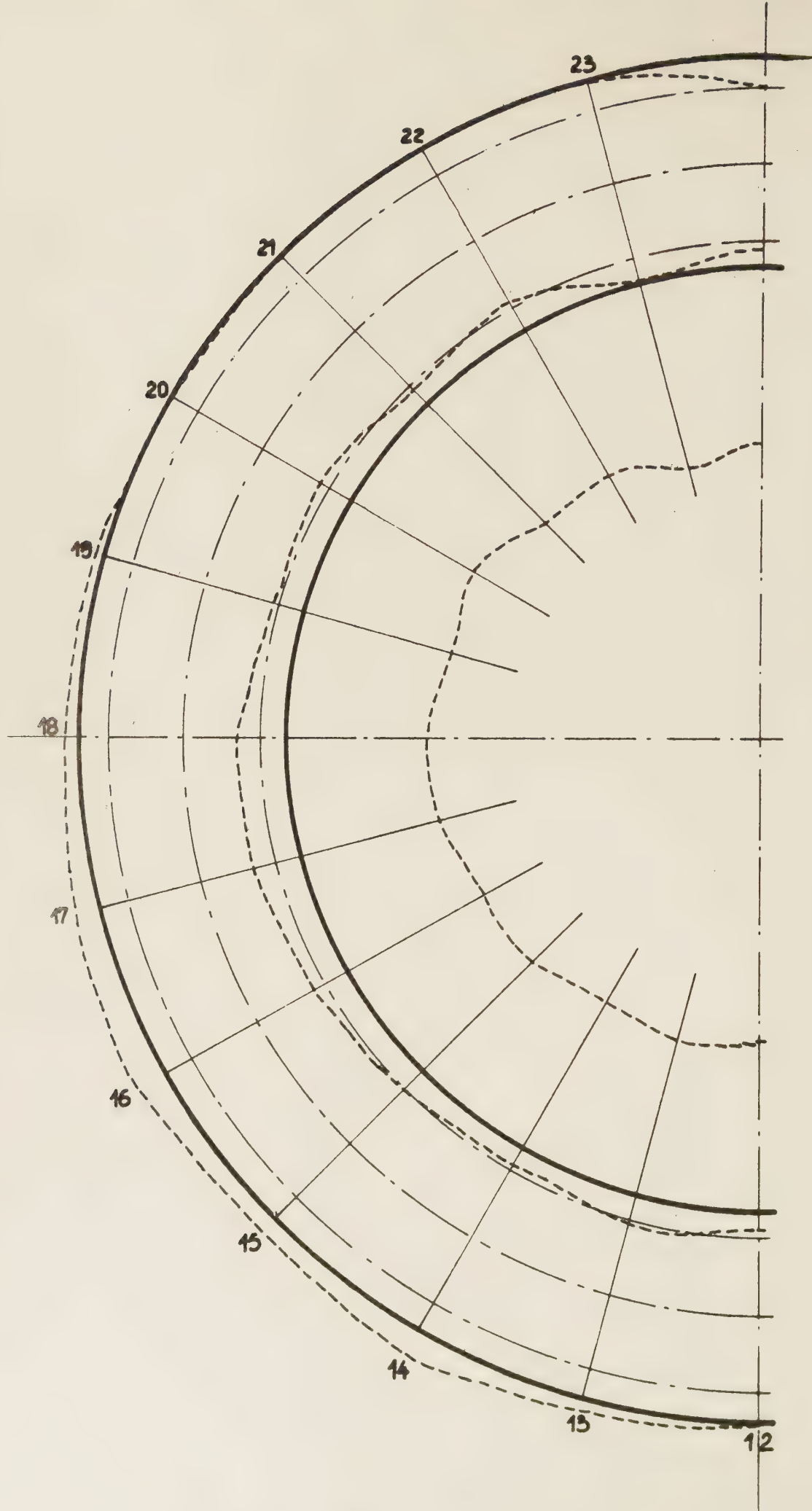
\_\_\_\_\_ r = 90



1mm = 1/100







D. RNUR APRES

20 FREINAGES

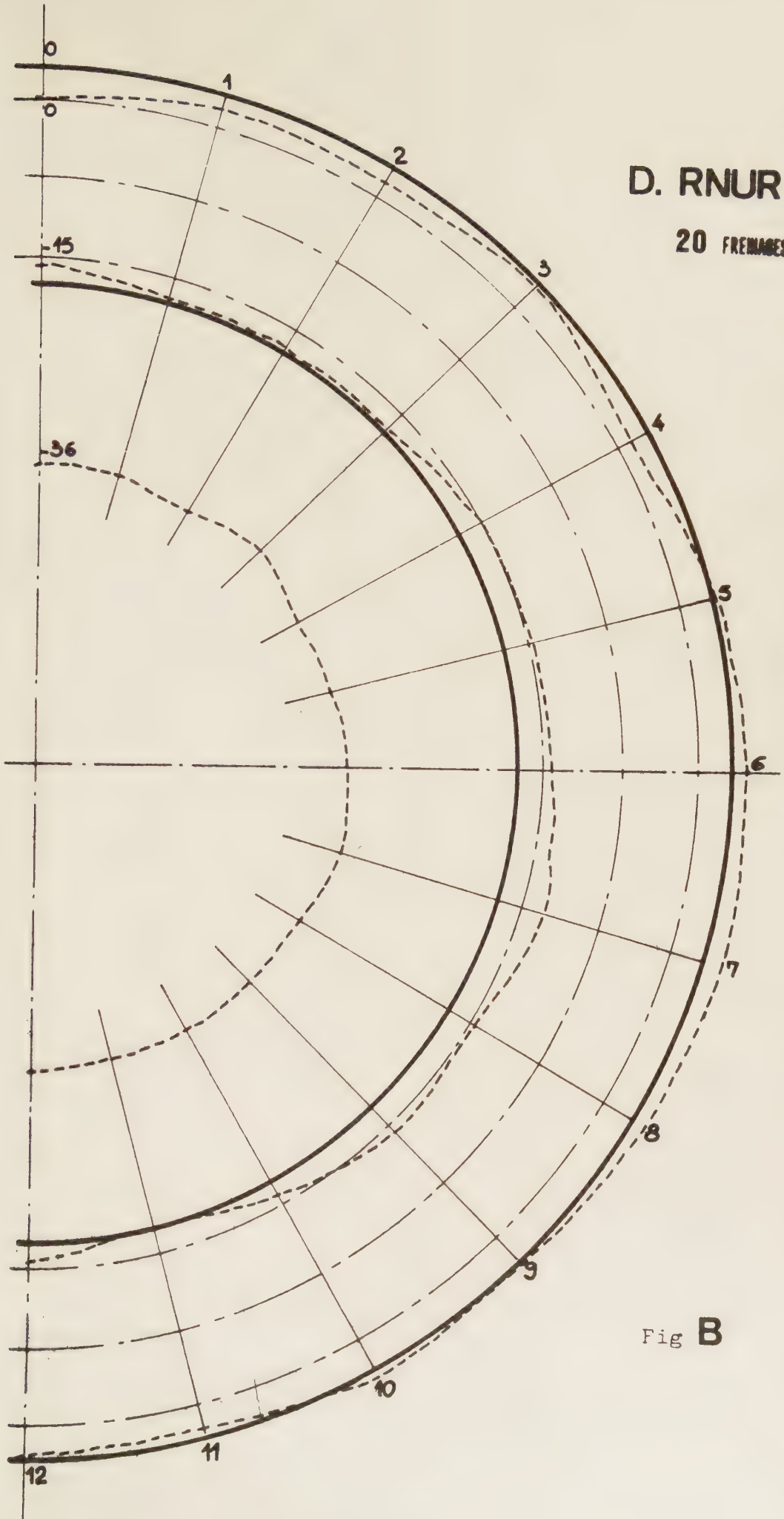
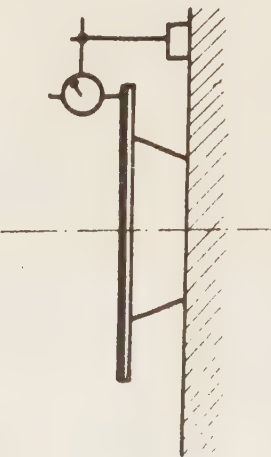


Fig B



# DISQUE RENAULT APRES 20 FREINAGES



1mm = 1/100

Variations des relevés suivant 3 rayons

- DEVELOPPEMENTS -

--- r = 120

--- r = 105

--- r = 90





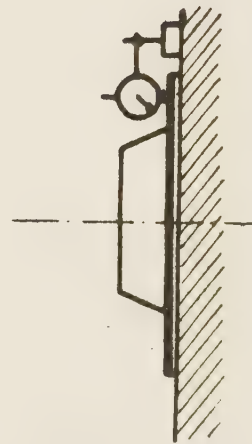
Variations des relevés suivant les rayons

- DEVELOPPEMENTS -

----- r = 120

- - - - - r = 105

..... r = 90



1mm = 1/100

On peut remarquer la régularité des courbes ainsi réalisées. Le défaut d'excentrage du disque est dû à un manque de parallélisme entre la face d'appui et la surface de frottement.

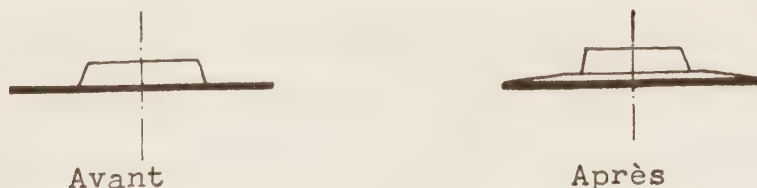
En plus de la courbe A réalisée en position I, les courbes dites "développements" ont été tracées en portant les variations d'altitude à partir d'une droite représentant le développement des trois circonférences.

Ce disque a été soumis ensuite aux essais décrits au début du chapitre. Après l'observation de l'aspect extérieur du disque, les mêmes mesures que celles faites avec le disque neuf ont été réalisées.

Les résultats obtenus sont reportés sur la courbe B et sur les développements correspondants réalisés en position I et II. Le point O se situe au niveau des fissures.

Avec ce disque d'origine Renault, on constate après les essais les faits suivants:

- Les faces de frottement ne sont plus perpendiculaires à l'axe de rotation du disque ( voir figure ci-dessous ), ce qui résulte d'une déformation générale



- On note, en plus sur les courbes correspondantes les variations importantes des différentes altitudes. Par comparaison avec les courbes du disque neuf, on ne retrouve plus

la régularité.

- La courbe réalisée sur la circonférence de rayon 105 mm, présente des variations importantes. A ce niveau, la chaleur n'est pas évacuée vers le moyeu ou vers la périphérie.

Toutefois, ces déformations ne sont que de quelques centièmes de millimètre. Sur les courbes 1/100 de mm est représenté par 1 mm.

Disposant d'un disque provenant des usines "MATRA", les mêmes mesures qu'avec le disque précédent ont été faites afin d'établir certaines comparaisons.

Les courbes C ont été établies à partir du disque neuf dans la position I, les développements ont été tracés à partir des relevés effectués dans les positions I et II.

Ce disque est soumis aux essais suivants :

- Mesure des temps de freinage à différentes vitesses.
- Essais effectués avec une forte pression dans le circuit hydraulique ( 60 à 70 bars ).

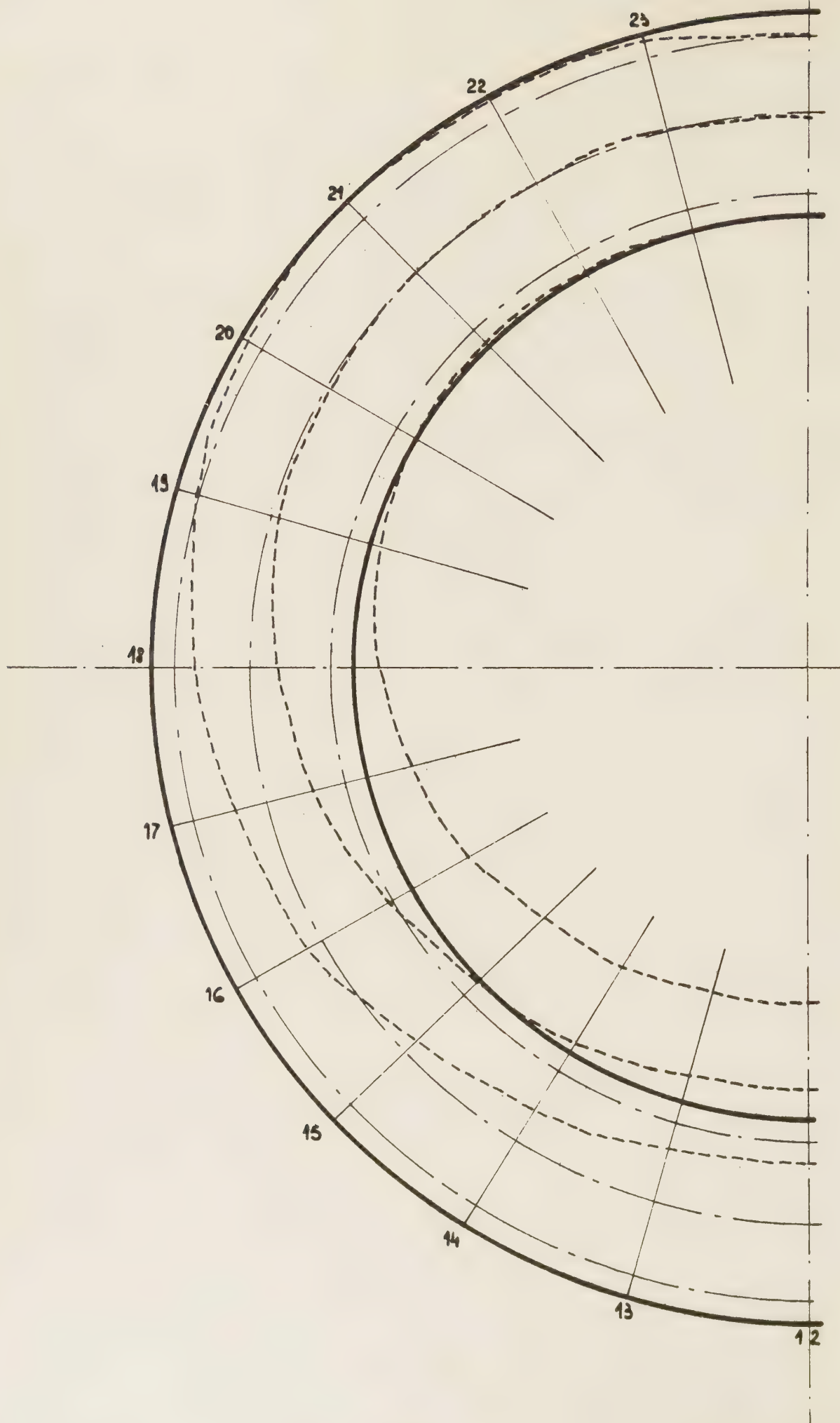
- Deux essais ont été effectués avec des plaquettes neuves qui ne sont pas de marque Ferodo, soit au total 23 essais effectués dans les mêmes conditions que précédemment.

Après ceci, les relevés ont été effectués toujours dans les mêmes conditions. La courbe D représente les variations d'altitude de la surface de frottement (relevées en position I). Les développements sont réalisés à partir des positions I et II.

Pour ce disque, le point O de départ des mesures était le même avant et après les essais.

On remarque tout d'abord que l'on retrouve la même dé-







# DISQUE MATRA NEUF

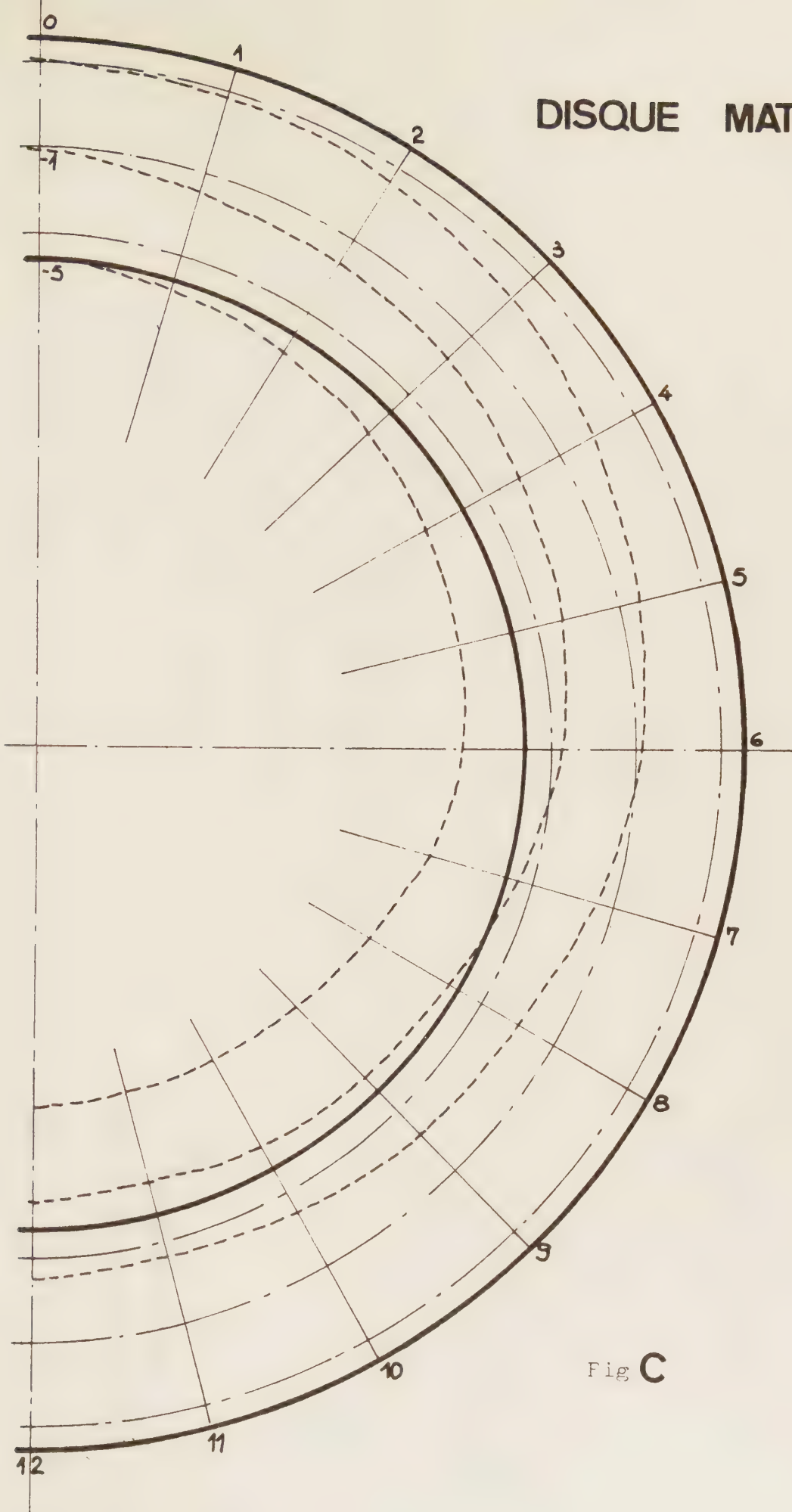
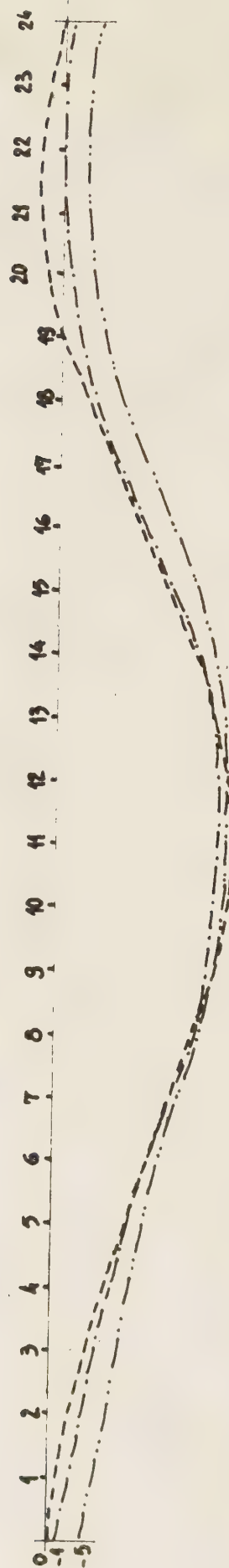


Fig C

# DISQUE " MATRA " AVANT LA SERIE D'ESSAIS



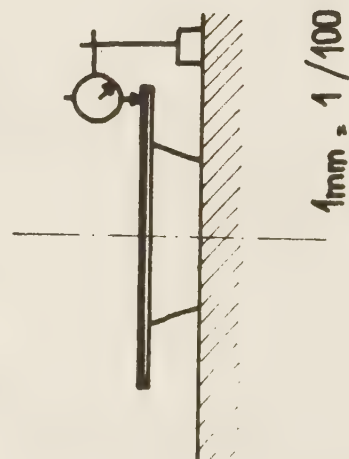
Variations des relevés suivant les 3 rayons

- DEVELOPPEMENTS -

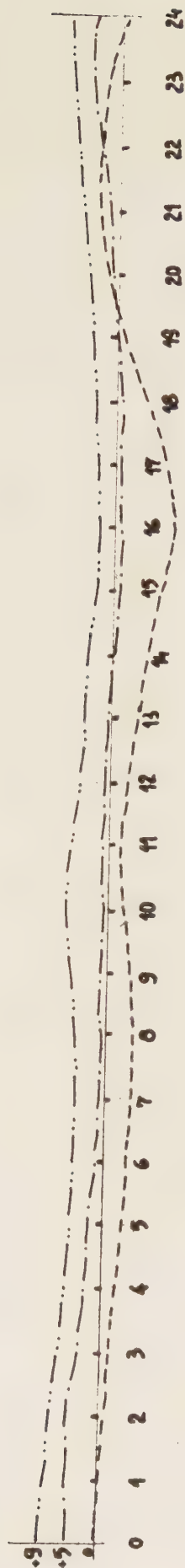
--- r = 120

- . - . r = 105

- - - r = 90



# DISQUE "MATRA" AVANT LA SERIE D'ESSAIS



Variations des relevés suivant les 3 rayons

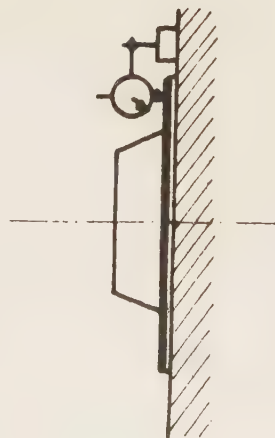
1mm = 1/100

- DEVELOPPEMENTS -

--- r = 120

-.-.- r = 105

..... r = 90



formation générale qu'avec le disque d'origine "Renault". Cette déformation a les mêmes valeurs que précédemment et pourrait être due à un défaut de positionnement de l'étrier par rapport au disque.

Par contre, l'ensemble des courbes présente pratiquement la même régularité avant et après les essais.

On peut donc penser que la forme du disque influe de façon non négligeable sur sa tenue à température élevée.

## **2** CONCLUSIONS

Après examen des courbes, les différences que l'on obtient nous amène à observer les formes géométriques des deux disques.

Celles-ci sont reproduites sur la figure E. On remarque que la principale différence entre les deux disques se situe au niveau du raccordement de ceux-ci avec leur moyeu.

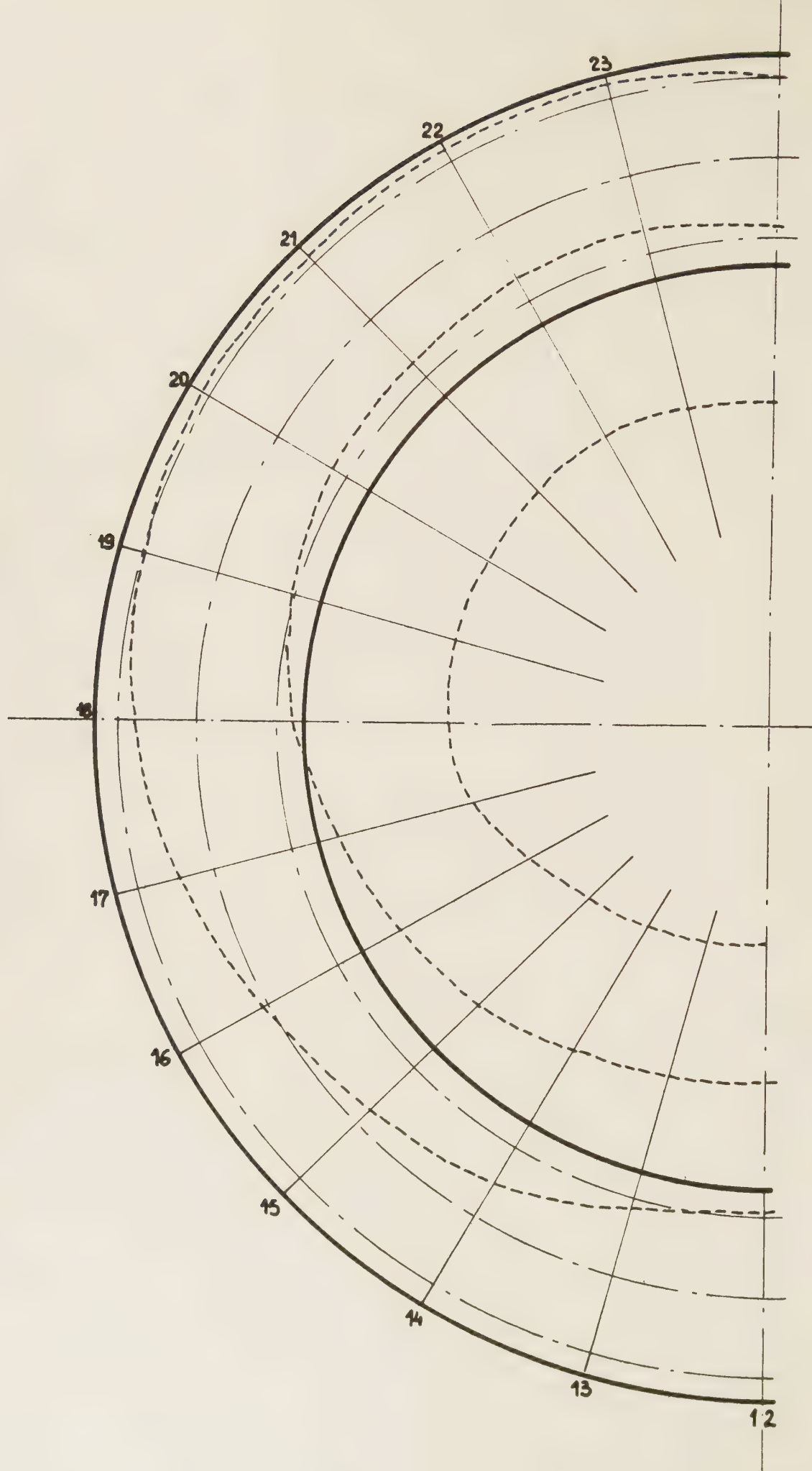
A partir de là on peut déduire que :

- Avec un raccordement massif, le flux thermique vers le moyeu est très important, d'où un gradient de température qui évolue dans le même sens. Cette différence de température entraîne des dilatations variables suivant les différentes zones et par là même, des déformations.

Inversement avec un raccordement plus étroit, la chaleur n'est pas évacuée vers le moyeu et le disque est porté à une température un peu plus élevée. Par contre, la variation







# D. MATRA

APRES LES ESSAIS

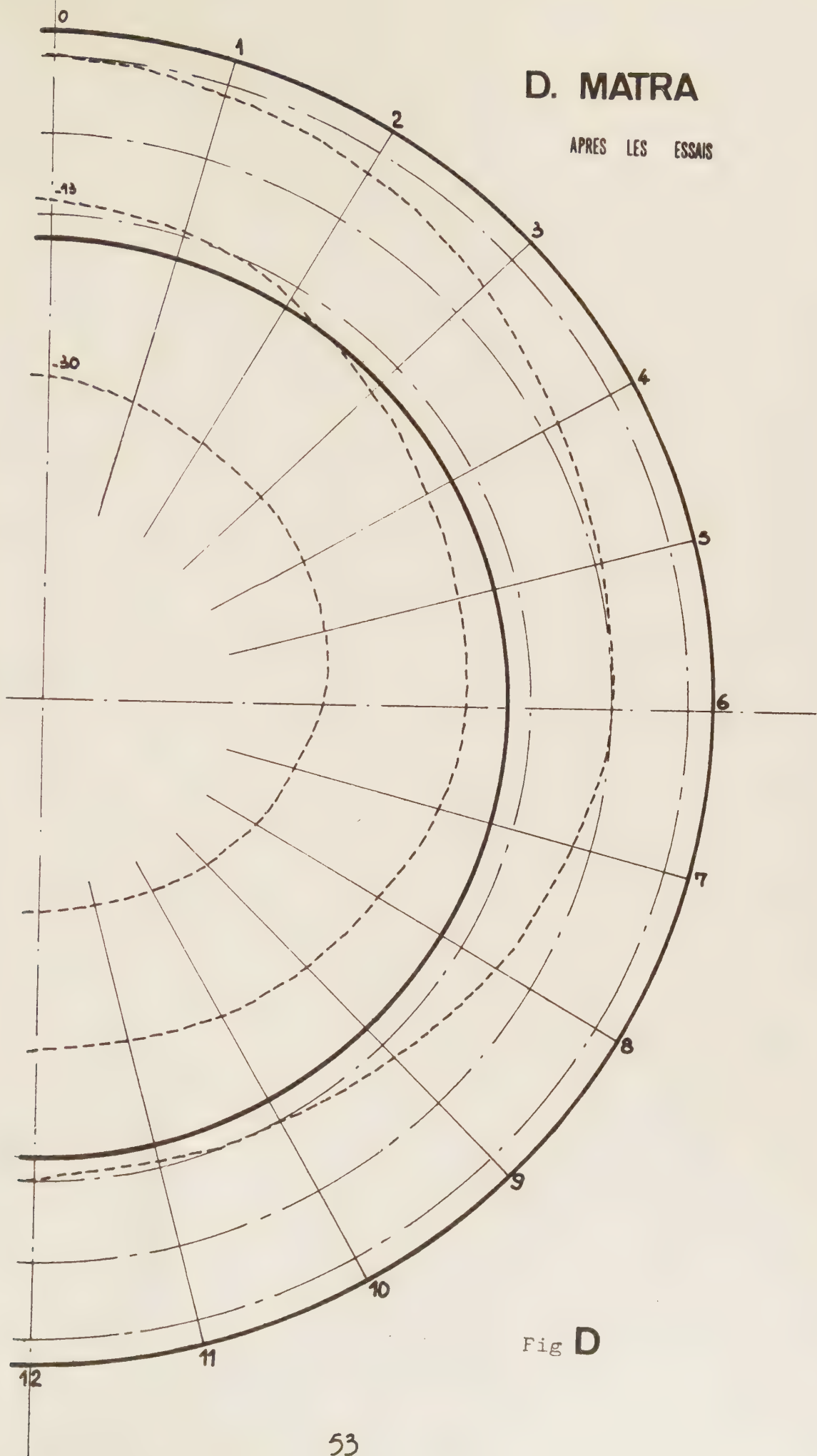


Fig D

# DISQUE MATRA APRES LA SERIE D'ESSAIS



Variations des relevés suivant les 3 rayons

- DEVELOPPEMENTS -

--- r = 120

-.-.- r = 105

..... r = 90

1mm = 1/100



# DISQUE MATRA APRES LA SERIE D'ESSAIS



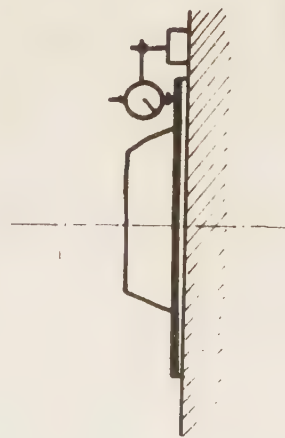
Variations des relevés suivant les 3 rayons

- DEVELOPPEMENTS -

----- r = 120

- . - . - . r = 105

..... r = 90



1mm = 1/100

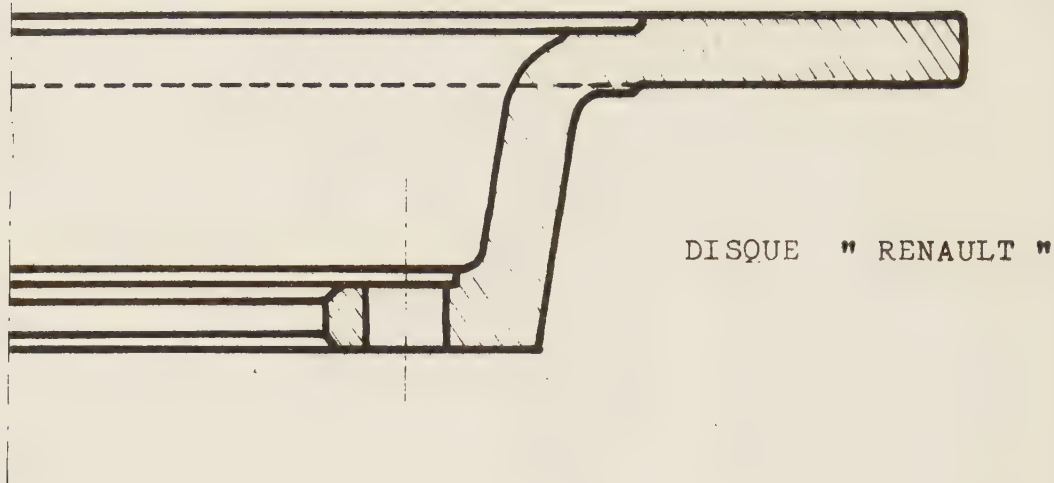
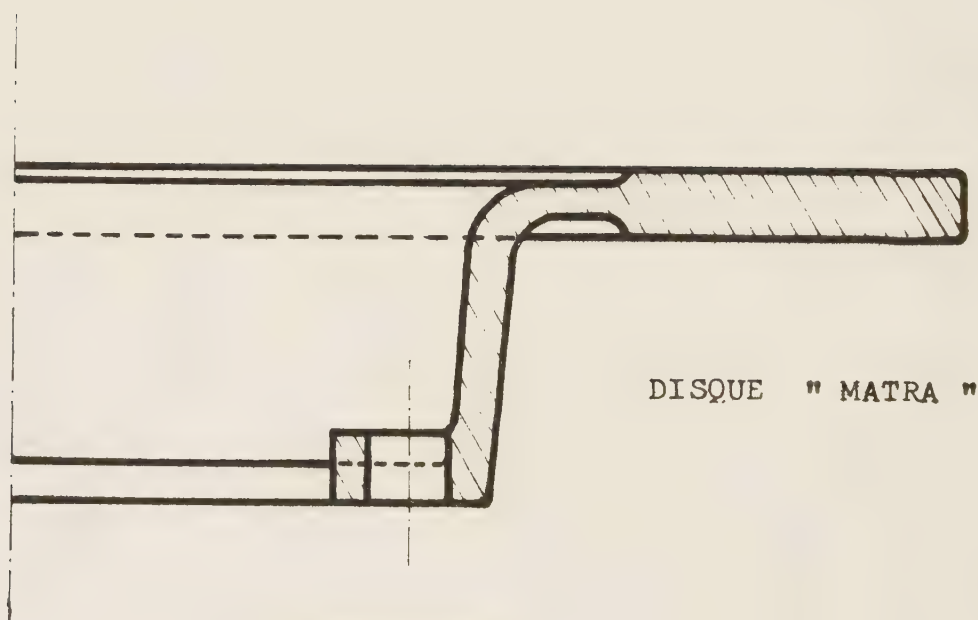


Fig E



- RACCORDEMENTS -

de celle-ci est plus faible et les déformations dues aux contraintes d'origine thermique ne sont pratiquement pas décelable avec les moyens utilisés.

Il serait donc intéressant d'étudier les formes de raccordement pour pouvoir déterminer celles qui donnent le minimum de déformations pour un disque utilisé d'une manière intensive.

Les déformations du disque ne sont peut-être pas primordiales quant au temps d'arrêt mais elles augmentent l'usure des plaquettes et engendrent des vibrations. Ces déformations peuvent aussi entraîner la fissuration partielle du disque avec pour conséquence, une rupture brusque de celui-ci.

## **E** USURE DES GARNITURES

**1** ESSAIS. Lors du montage du frein d'essai, en même temps qu'un disque neuf, ont été montées des plaquettes neuves. Une série de quinze essais ont été effectués à partir de 2 900tr/mn soit 285 km/h.

Après ces essais, le disque présente des traces radiales et l'aspect des faces de frottement des plaquettes est rugueux et strié.

On remarque une fissure et des petits cratères qui semblent dus à une brûlure partielle du matériau, occasionnée par la température élevée à laquelle sont portées les plaquettes



en cours d'utilisation.

Parallèlement à la vérification des temps de freinage effectuée précédemment, l'usure des plaquettes a été mesurée à chaque essai.

Ces essais ont été faits avec un disque provenant de chez "MATRA" qui, au début des essais, présentait une surface de frottement très régulière (voir déformation du disque).

L'épaisseur des plaquettes, à chaque essai, est mesurée en deux points fixes de celles-ci. De plus, elles sont toujours montées de la même manière afin que ce soit toujours la même qui se trouve directement en contact avec le piston récepteur.

La plaquette baptisée de "gauche" est celle qui est en contact avec le piston récepteur.

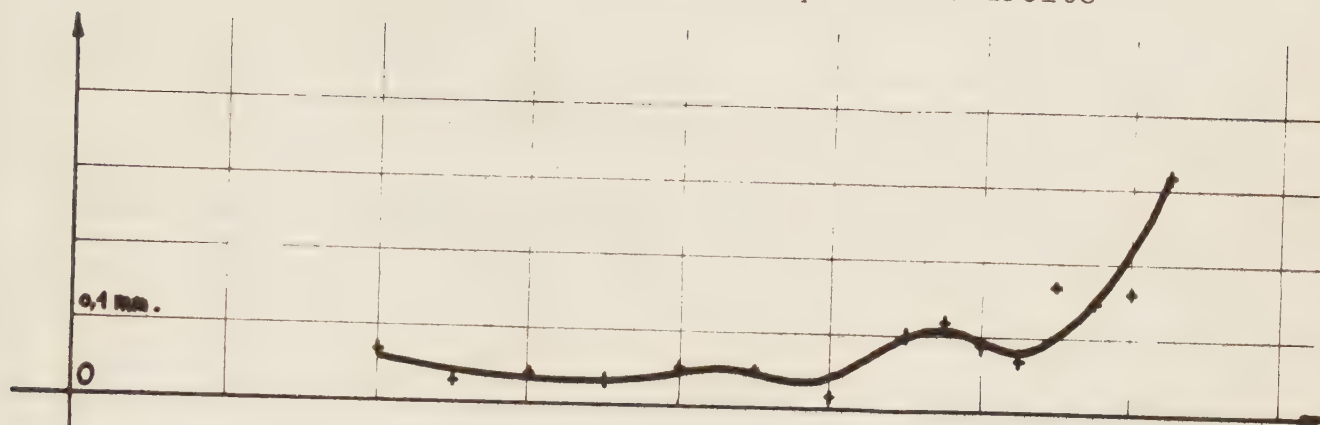
## 2 RESULTATS OBTENUS

| Vitesse de rotation | Usure plaquette<br>de gauche | Usure plaquette<br>de droite |
|---------------------|------------------------------|------------------------------|
| 300 tr/mn           | 0,04 mm                      | 0,07 mm                      |
| 1 100               | 0,03                         | 0,03                         |
| 1 200               | 0,02                         | 0,04                         |
| 1 400               | 0,03                         | 0,03                         |
| 1 600               | 0,04                         | 0,05                         |
| 1 800               | 0,06                         | 0,05                         |
| 2 000               | 0,03                         | 0,02                         |
| 2 200               | 0,10                         | 0,10                         |
| 2 300               | 0,13                         | 0,12                         |
| 2 400               | 0,08                         | 0,09                         |
| 2 500               | 0,07                         | 0,07                         |
| 2 600               | 0,13                         | 0,17                         |
| 2 700               | 0,18                         | 0,15                         |
| 2 800               | 0,23                         | 0,16                         |
| 2 900               | 0,30                         | 0,32                         |

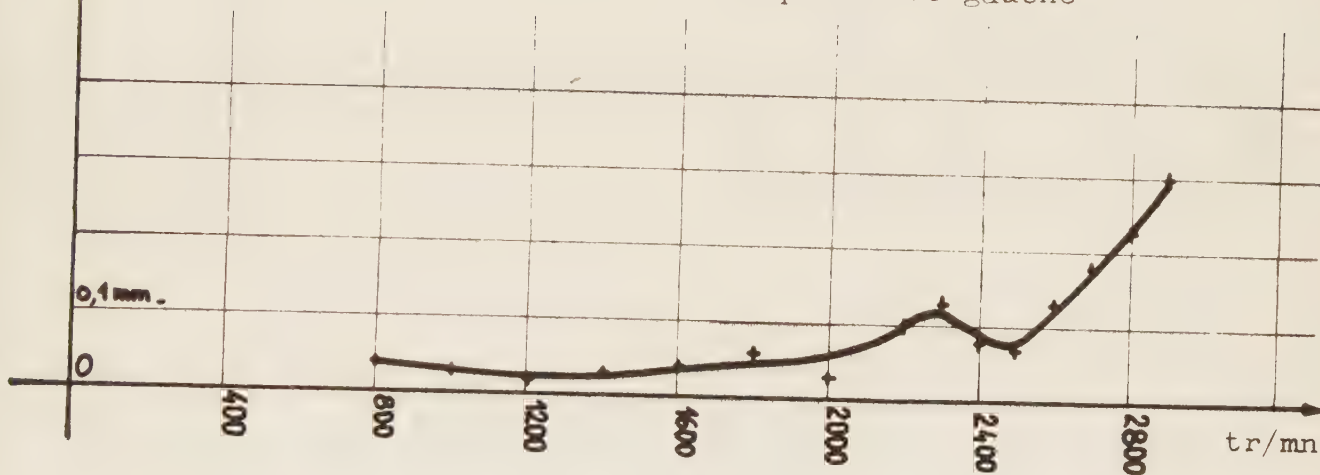
Ce qui donne les courbes de la page 59

# USURE DES GARNITURES

Plaquette de droite



Plaquette de gauche



### **3** CONCLUSIONS

L'usure des plaquettes a sensiblement la même forme du coté droit et du coté gauche.

Elle augmente très rapidement quand on atteint des vitesses élevées. Elle commence à être importante à partir de 2 200 tr/mn. C'est vers cette vitesse d'ailleurs, que les temps de freinage réels commencent à ne plus correspondre avec ceux calculés.

Vers 2 300 tr/mn, la courbe présente un extremum; au cours des essais, on note que vers cette vitesse, l'ensemble de l'appareil vibrait. Ces vibrations cessent dès que l'on augmente la vitesse. Pour cette vitesse, on peut donc penser que ces vibrations entraînent une augmentation de l'usure des plaquettes.

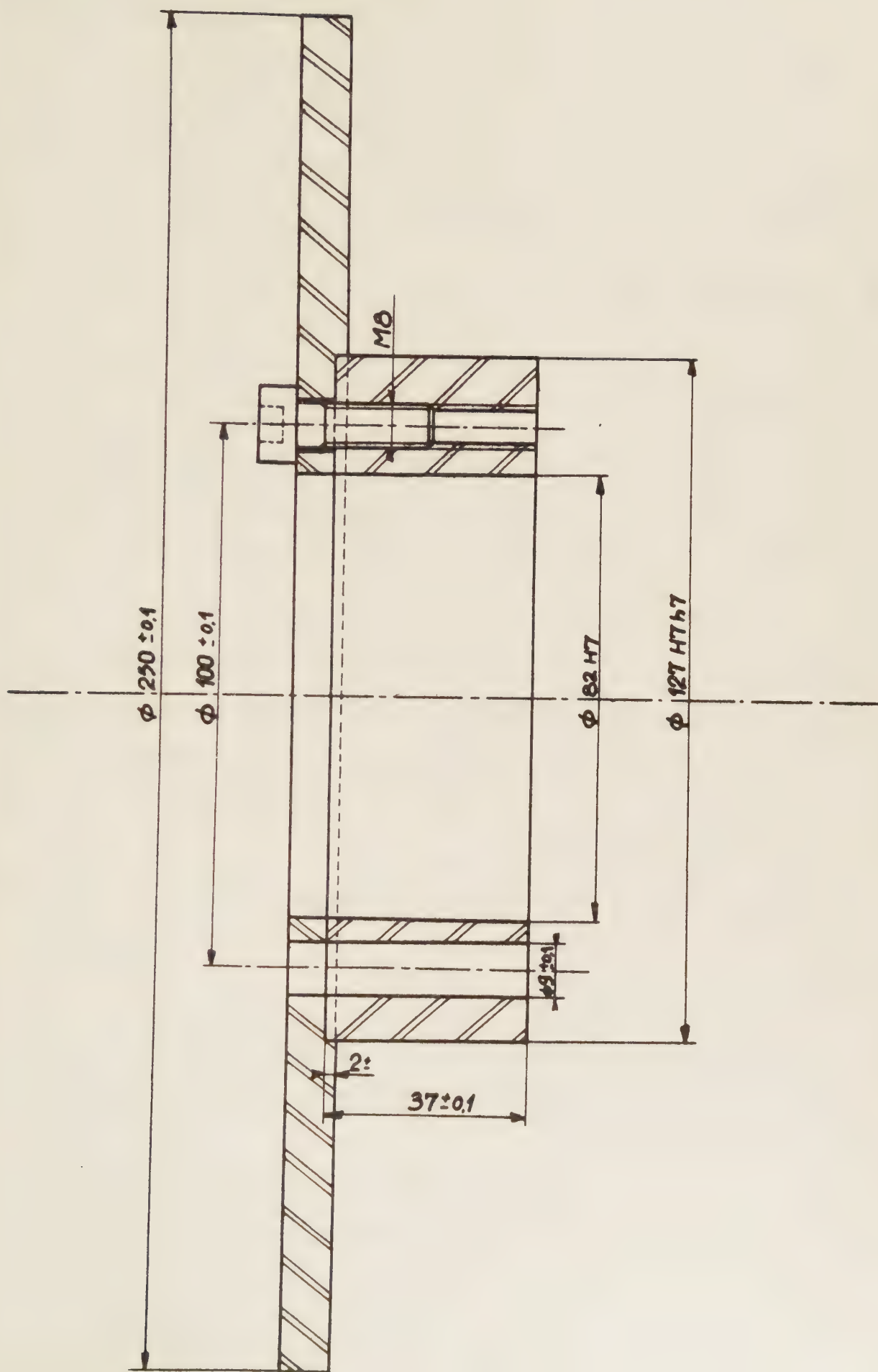
## **F** DISQUE EN ALLIAGE LEGER

### **1** Fabrication du disque.

La réalisation d'un tel disque a été faite à partir des cotes principales d'un disque en fonte, c'est à dire :

- Diamètre extérieur
- Epaisseur du disque
- Décalage entre une face du disque et sa face d'appui
- Diamètre de l'alésage

Ce disque est réalisé en deux parties afin de faciliter l'usinage. En effet, ce disque ne doit servir qu'à des essais



préliminaires pour connaître le comportement des alliages légers utilisés comme partie frottante.

La propriété que l'on cherche à exploiter, en utilisant de tels matériaux, est la grande conductibilité thermique de l'aluminium et de ses alliages.

## 2 RESULTATS des essais.

Après le montage de ce disque sur le banc d'essai, a été effectué un premier essai d'exploration.

Pour effectuer cet essai à une vitesse de rotation de 1 200 tr/mn et une pression dans le circuit de freinage de 30 bars, ont été montées des plaquettes neuves.

Le comportement du disque paraît normal. Seule une mince pellicule du matériau constitutif des plaquettes reste collée au disque. Compte tenu de ces résultats, un essai a été tenté dans des conditions plus sévères. Pour cela, la vitesse de rotation était de 2 900 tr/mn et la pression dans le circuit de freinage de 40 bars.

Pendant la période de freinage, seules les particules arrachées aux plaquettes brûlent à la sortie de celles-ci et donnent quelques points rouges.

Dans ces conditions, les plaquettes s'usent énormément. Environ 2 mm de matière sur chaque plaquette ont disparu au cours de cet essai.

De plus, les particules dures qui se trouvent dans les plaquettes creusent des sillons relativement profonds.

### **3** CONCLUSIONS

On peut, à partir de cet essai, tirer plusieurs conclusions.

Les plaquettes utilisées ne conviennent pas pour un disque en alliage léger. En effet, il faut éviter la présence de particules dures dans celles-ci.

L'usure anormale des plaquettes n'est pas due à l'état initial de surface du disque car celui-ci était très bon avant l'essai. Les premières particules arrachées rayent le disque. Ces rayures usant un peu plus les plaquettes et ainsi de suite, on peut donc dire, que dans ces conditions, l'alliage utilisé convient mal comme matériau de frottement.

L'avantage que l'on peut retirer d'un disque en alliage léger est que la température atteinte par celui-ci est plus faible qu'avec un disque en fonte donc en principe, une éventuelle meilleure tenue de plaquettes appropriées.

Pour améliorer le frottement, tout en gardant les qualités de conductibilité thermique de l'aluminium, on peut recouvrir les surfaces frottantes du disque d'une couche mince de chrome.

Il aurait été utile de faire des essais avec des plaquettes de différentes matières, mais cela aurait demandé la fabrication spéciale de celles-ci entraînant la mise en oeuvre de moyens considérables.





# 2

**E**TUDE

**T**HERMIQUE

APPLICATION DE LA THERMOCINETIQUE AU CAS DU FREINAGE

INTRODUCTION

Dans le cas du freinage, il faut évacuer un flux de chaleur très important.

En schématisant, on peut dire, qu'une plaque circulaire de garniture est mise en contact avec une plaque métallique de même diamètre, en relation directe avec les roues.

Cas d'un coup de frein isolé :

Une certaine pression est appliquée sur le frein, il apparait un couple de frottement et une puissance mécanique se trouve détruite et transformée en chaleur si un flux de densité  $\varphi$  attaque la plaque métallique. Comme le coup de frein est bref, on est donc en présence d'un phénomène thermique bref et la chaleur produite pénètre dans la plaque et dans la garniture comme si les deux milieux étaient infiniment épais.

La chaleur se partage entre garniture et métal, proportionnellement à chacun des coefficients d'effusivité  $\sqrt{\lambda \rho c}$ , de sorte qu'approximativement, 90 à 95 % du flux pénètrent dans le métal et 5 à 10 % seulement dans la garniture.

La surface de jonction prend une température croissant comme la racine carrée du temps et inversement proportionnelle au

coefficient d'effusivité total ( $\sqrt{\lambda_1 \rho_1 C_1} + \sqrt{\lambda_2 \rho_2 C_2} = \sigma$ ) : cf annexe 1  
 (Rappel des principes de thermocinétique applicables à la présente étude)

La température superficielle suivra la loi :

$$T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\varphi}{\sigma} \cdot \sqrt{t} = \theta(0, t)$$

Il faut tenir compte de la variation de flux dans le temps, liée, en l'espace au ralentissement progressif de la voiture. Si la durée du coup de frein atteint quelques secondes ce milieu métallique ne se comporte plus comme un milieu illimité.

Le disque de métal, souvent en fonte, a un coefficient d'effusivité assez faible (en raison de la faible conductivité) et la température atteinte peut être élevée (quelques centaines de degrés).

La formule précédente était relative au recouvrement total. Dans le cas du frein à disque on peut admettre cette formule comme approximativement correcte, étant la somme des coefficients d'effusivité du disque et de la garniture, la densité de flux étant rapportée à l'aire balayée par le segment de garniture. La répartition du flux de chaleur entre disque et garniture est proportionnelle au bout d'un nombre de tours relativement important aux coefficients d'effusivité respectifs, et indépendante du rapport des aires.



# A

## ETUDE DE LA TEMPERATURE DE SURFACE

- Dans le cas du milieu illimité.
- Formules du milieu thermique limité.
  - cas d'un flux constant
  - cas d'un flux linéairement décroissant
- Vérifications expérimentales
- Liaison entre "milieu limité" et "milieu illimité".
- Détermination de la loi de flux
- Température de surface des disques essayés.

### NOTATIONS EMPLOYEES

$\theta(x,t)$  = température du disque à l'abscisse  $x$  et au temps  $t$

$\lambda$  = coefficient de conductivité

$\rho$  = masse volumique

$q_0$  = flux de chaleur à l'instant 0

$q$  = flux de chaleur à l'instant  $t$

$c$  = capacité calorifique

$t$  = temps en secondes

$T$  = durée totale du freinage

$l = 2l' =$  épaisseur totale du disque

$a = \lambda/\rho c =$  coefficient de diffusivité

$b = \sqrt{\lambda \rho c} =$  coefficient d'effusivité

$\alpha$  = pente de la droite représentant le flux



# A1 ETUDE DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR PAR CONDUCTIVITE EN MILIEU PLAN ILLIMITE AVEC UN FLUX DE CHALEUR CONSTANT IMPOSE SUR UNE FACE.

Ce cas est assimilable en pratique au cas d'un freinage rapide (quelques secondes) en descente, à vitesse et couple constant (pour empêcher par exemple l'accélération sous l'action des forces de pesanteur) avec un RECOUVREMENT PARFAIT de la paroi frottée par les garnitures.

Le problème se résout alors en intégrant l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

compte tenu que la température initiale  $\theta_i$  du milieu est constante quelquesoit  $x$  pour  $t = 0$ , que le flux de chaleur  $q$  par unité de surface et de temps sur la face  $x = 0$  est constant quelquesoit le temps et que sur la face à l'infini (thermiquement éloignée) le gradient de température  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ , ce qui donne:

$$\theta(x, t) = \theta_i + \frac{q}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \int_0^t \frac{e^{-x^2/4at}}{\sqrt{t}} dt$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} = \text{"diffusivité"}$$

$\theta(x, t)$  = température au temps  $t$  et à l'abscisse  $x$  de la surface frottante, ce qui donne pour celle-ci :

$$\theta(0, t) = \theta_i + \frac{q}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \underbrace{\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}}}_{2\sqrt{t}}$$

$$\theta(0,t) = \theta_i + \frac{2.9. \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}}$$

Plus le coefficient d'effusivité  $\sqrt{\lambda \rho c}$  est élevé, plus la température de surface est basse, et nous constatons que le temps intervient par sa racine carrée.

## 1.1 PARTAGE DE LA CHALEUR

Nous avons raisonné en supposant que toute la chaleur dégagée par le frottement passait dans le disque. En fait il n'en est pas ainsi, et nous voyons en écrivant l'équation :

$$\theta(0,t) = \theta_i + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{q}{\sqrt{\lambda \rho c}} \cdot \sqrt{t}$$

pour les deux matériaux frottants et en écrivant que la température de surface sur la face commune  $x = 0$  est la même, que la chaleur se partage proportionnellement aux coefficients d'effusivité de chaque matériau frottant :



$$\theta_1(0,t) = \theta_i + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{q_1}{\sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1}} \cdot \sqrt{t}$$

$$\theta_2(0,t) = \theta_i + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{q_2}{\sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_2}} \cdot \sqrt{t}$$

$$\theta_1(0,t) = \theta_2(0,t) \implies \frac{q_1}{\sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1}} = \frac{q_2}{\sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_2}}$$

Pour les freins équipés avec des garnitures courantes en matières plastiques amiantées, le calcul correspondant montre que la quasi totalité de la chaleur passe dans le disque pendant le coup de frein, par exemple 90 à 95 % avec des fluctuations dépendant de la nature des matériaux frottants.

## 1.2 FORMULE PRATIQUE (S.A.F. du FERODO)

En transposant en données pratiques les résultats physiques, nous obtenons pour la fonte :

$$\Delta\theta_s = \theta(0, t) - \theta_i = 1,3 \cdot \rho' \cdot \mu \cdot \frac{P \cdot V \cdot i}{S} \cdot \sqrt{t}$$

où P est la masse du véhicule en kg

V sa vitesse en km/h

i la pente du terrain en %

S la surface de freinage en cm<sup>2</sup>

$\mu$  la charge de freinage sur l'essieu considéré

$\rho'$  le coefficient de partage de la chaleur

(voisin de 1 en pratique)

t le temps de freinage en secondes

Rappelons que d'après les hypothèses de départ, cette formule n'est valable qu'en frottement continu et pendant un temps bref.

## 2 ETUDE DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR PAR

### CONDUCTIVITE EN MILIEU PLAN ILLIMITE AVEC UN FLUX DE CHALEUR LINEAIREMENT DECROISSANT.

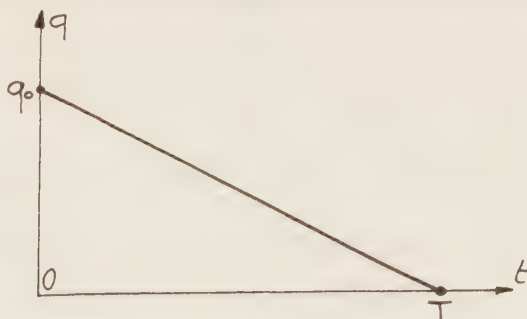
La température moyenne de surface est la somme de la température initiale  $\theta_i$  de régime du frein et de l'accroissement  $\Delta\theta$  de température moyenne que prend la surface pendant le freinage.

$$\theta_s = \theta_i + \Delta\theta$$

$$\theta_s = \theta(0,t) = \theta_i + \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\lambda \rho c}} \int_0^t \frac{q_0 - \alpha t}{\sqrt{t}} dt$$

$$\Delta\theta = \frac{2q_0 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{T} \right)$$

où pour chacun des deux matériaux frottants (on peut prendre indifféremment l'un ou l'autre pour le calcul, en fait on se sert du matériau métallique, mieux connu et recevant, comme il a été vu précédemment 90 à 95 % du flux de chaleur),  $q_0$  représente le flux initial pénétrant dans le matériau sous la loi de flux linéairement décroissant avec le temps,  $q = q_0 - \alpha t$ .



Ce cas est le plus important en freinage, c'est celui du freinage d'arrêt ou de ralentissement à décélération constante

(mouvement uniformément retardé)

où  $T = q_0/\alpha$  est la durée totale du freinage

$\lambda$  = le coefficient de conductivité du matériau

$\rho$  = la masse volumique

$c$  = la chaleur spécifique

$$\theta_s = \theta(0, t) = \theta_i + \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \left( q + \frac{\alpha t}{3} \right)$$

## 2.1 RECHERCHE DU MAXIMUM DE $\Delta\theta$

La dérivée de  $\Delta\theta$  par rapport à  $t$  est :

$$\Delta\theta = \frac{2q_0\sqrt{E}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right) = \frac{2q_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \left( \sqrt{E} - \frac{2t^{3/2}}{3T} \right)$$

$$\frac{d(\Delta\theta)}{dt} = \frac{2q_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \left( \frac{1}{2\sqrt{E}} - \frac{\sqrt{E}}{T} \right)$$

$$\frac{d(\Delta\theta)}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2\sqrt{E}} = \frac{\sqrt{E}}{T} \implies t = \frac{T}{2}$$

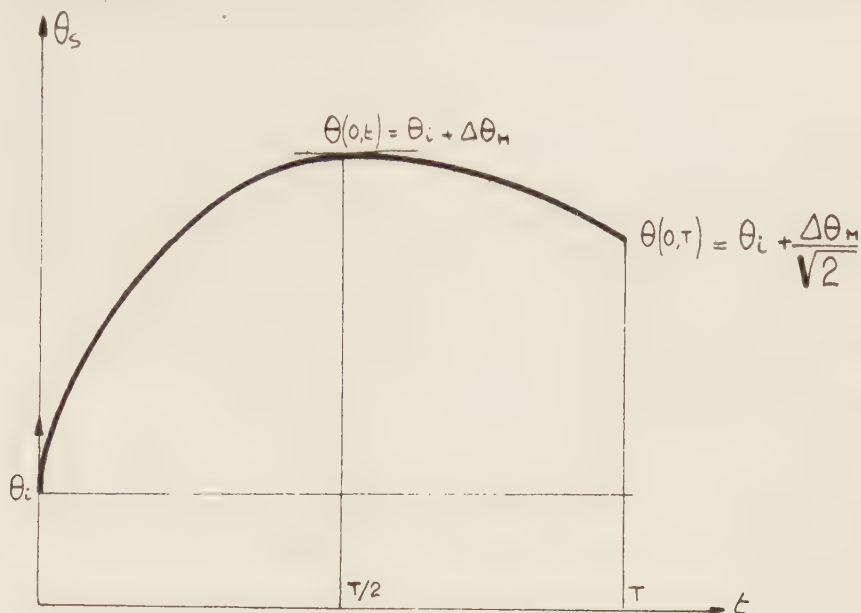
$$t = 0 \longrightarrow \frac{d(\Delta\theta)}{dt} = \infty$$

$$t = T \longrightarrow \frac{d(\Delta\theta)}{dt} = \frac{2q_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \left( \frac{1}{2\sqrt{T}} - 1 \right)$$

La forme de cette courbe est remarquable par sa tangente infinie à l'origine, son maximum qui a lieu juste au milieu du coup de frein (instant  $t = T/2$ ) de valeur :

$$(\Delta\theta)_{\text{maxi}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} q_0 \sqrt{\frac{q_0}{2\alpha}}$$

et le fait que la température finale à l'instant  $t = T$  est égale à la température maximale (accroissement) divisée par  $\sqrt{2}$ .



$(\Delta\theta)_{\text{maxi}}$  s'écrit :

$$(\Delta\theta)_M = \frac{4}{3\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda\rho c}} \cdot q_0 \sqrt{T}$$

Nous avons  $q_0 = 2 q_{\text{moyen}}$  (flux de chaleur linéairement décroissant)

$$(\Delta\theta)_{\text{maxi}} = \frac{8}{3\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda\rho c}} \cdot q_{\text{moyen}} \cdot \sqrt{T}$$

$$= \frac{1,063}{\sqrt{\lambda\rho c}} \cdot q_{\text{moyen}} \cdot \sqrt{T}$$

Pour la fonte nous avons  $\sqrt{\lambda\rho c} = 0,28 \text{ CGS}$   
 $= 1,18 \cdot 10^2 \text{ MKSA}$

$$(\Delta\theta)_{\text{maxi}} = 3,80 \cdot q_{\text{moyen}} \cdot \sqrt{T} \quad q \text{ en cal/cm}^2 \cdot \text{s}$$

$$(\Delta\theta)_{\text{maxi}} = 0,90 \cdot 10^{-2} q_{\text{moy}} \cdot \sqrt{T} \quad q \text{ en J/cm}^2 \cdot \text{s}$$



(Pour le cuivre le coefficient serait 1,3 CGS au lieu de 3,8 et de  $0,34 \cdot 10^{-2}$  (MKSA) au lieu de  $0,90 \cdot 10^{-2}$ .)

## 2.2

Il est intéressant, techniquement de transposer cette formule en pratique en introduisant la masse du véhicule, sa vitesse, sa décélération et nous aboutissons alors à la formule suivante donnant l'élévation maximale de la température de surface au dessus de la température de régime initiale d'un disque pendant un coup de frein :

$$(\Delta\theta)_{\text{maxi}} = \theta_{s \text{ maxi}} - \theta_i$$

$$(\Delta\theta)_{\text{maxi}} = \frac{0,009}{\sqrt{\lambda \rho c}} \cdot \rho' \cdot \xi \cdot \frac{P}{S} \cdot V^{3/2} \cdot \sqrt{\gamma}$$

où P est la masse en kg du véhicule

V la vitesse initiale de freinage en km/h

S la surface utile du piston en  $\text{cm}^2$

$\gamma$  la décélération en  $\text{m/s}^2$

$\xi$  la charge de freinage de l'essieu intéressé

$\rho'$  le coefficient de partage de la chaleur entre les garnitures et le disque

$\sqrt{\lambda \rho c}$  le coefficient d'effusivité en CGS

Pour la fonte nous aurions :

$$(\Delta\theta)_{\text{maxi}} = 0,033 \cdot \rho' \cdot \xi \cdot \frac{P}{S} \cdot V^{3/2} \cdot \sqrt{\gamma}$$

On constate que la vitesse est le facteur prépondérant, le rapport P/S intervient linéairement et la décélération

n'intervient que par sa racine carrée.

Il convient d'étendre l'étude au cas des milieux LIMITES, en effet, la surface de contact des deux matériaux frottants se comporte souvent, dans les freins classiques, comme si ces matériaux étaient en conditions thermiques limitées, mais en fait il n'en est pas ainsi dans la masse de ces matériaux frottants à partir d'une certaine profondeur.

La connaissance exacte de la température à l'intérieur des matériaux frottants, pendant l'opération de freinage est nécessaire pour l'étude de certains phénomènes subsidiaires qui les affectent en surface. (par exemple les criques de tension thermique) Par ailleurs cette température conditionne le traitement thermique infligé à cette profondeur au matériau, qui, lorsque les couches superficielles auront été enlevées par usure, viendra lui-même frotter en surface et dont le comportement correspondant en frottement et usure sera alors fonction du traitement thermique antérieur.

**A2**TEMPERATURE DE SURFACE

EN

**MILIEU LIMITE**

La température moyenne de surface en freinage est la somme de la température  $\theta_i$  initiale de régime du frein et de l'accroissement  $\Delta\theta$  que prend la surface pendant le freinage.

Nous avons vu que  $\Delta\theta$  était donné par la formule :

$$\Delta\theta = \frac{2 \cdot \sqrt{t} \cdot q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right)$$

$q_0$  représente le flux initial pénétrant dans le matériau sous la loi de flux de chaleur linéairement décroissant avec le temps  $t$

$$q = q_0 - \alpha t \quad \text{où } T = q_0 / \alpha \text{ est la durée totale du freinage}$$

La forme de cette courbe est remarquable par sa tangente infinie à l'origine, son maximum a lieu au milieu du coup de frein et a pour valeur :

$$(\Delta\theta)_{\text{maxi}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \cdot q_0 \cdot \sqrt{\frac{q_0}{2\alpha}}$$

La température finale ( $t = T$ ) est égale à :

$$\theta_i + (\Delta\theta)_f = \theta_i + \frac{4}{3\sqrt{2\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \cdot q_0 \cdot \sqrt{\frac{q_0}{2\alpha}}$$

$$\text{soit } (\Delta\theta)_f = \frac{(\Delta\theta)_{\text{maxi}}}{\sqrt{2}}$$

Le disque étant bon conducteur de la chaleur, relativement aux garnitures, tout le flux de chaleur à 5 ou 10 % près passe dans celui-ci.

Bien que toutes les formules précédentes permettent de se guider de façon suffisante dans les cas où le milieu thermique n'est plus illimité, il est nécessaire d'étendre l'étude faite au cas des milieux thermiques "limités".

Parmi les freins fonctionnant en milieu thermique limité se trouvent les freins d'avion et surtout les freins à disque d'automobile.

Les garnitures se trouvent toujours en milieu thermique illimité en raison de leur conductibilité thermique.

Dans cette étude, nous n'entendrons par température moyenne de surface que l'accroissement instantané de température  $\Delta\theta_s$  pendant le coup de frein, à partir de la température de régime  $\theta_i$  du frein juste au début d'un coup d'application.

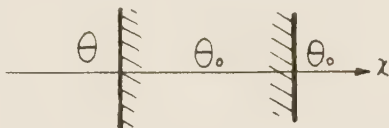
Il y a donc lieu dans les calculs de l'ajouter à l'accroissement proprement dit pour obtenir la température de surface totale.

$$\theta_s = \theta_i + \Delta\theta_s$$

## 1 FORMULES DU MILIEU THERMIQUE LIMITE

Dans la propagation de la chaleur à l'intérieur d'un matériau frottant le milieu est thermiquement limité pendant la durée de la propagation, si le milieu est tel qu'à partir d'un certain moment ( au début, le milieu est thermiquement illimité ) la chaleur ne peut plus s'écouler librement dans le matériau comme elle le ferait s'il était d'épaisseur infinie.

Dans le cas d'un modèle constitué par un milieu conducteur de température initiale dont l'une des faces se trouve en contact avec un milieu à la température supérieure à et l'autre face en contact avec un milieu à la température,



la température s'élève alors sur la face dorsale, la chaleur ne pouvant plus s'y écouler, plus rapidement qu'elle ne le ferait à la même profondeur d'un milieu d'épaisseur infinie, ce qui par réaction de proche en proche en raison de la loi de Fourier relève en fonction du temps d'une façon appropriée, qu'il s'agira de déterminer, la température de surface par rapport à celle du milieu d'épaisseur infinie.

Si cet accroissement en surface est faible ou négligeable, et bien que le milieu soit limité, la température de la surface est la même que si le milieu était illimité, sinon la

différence peut être importante et les théories de la thermocinétique montrent qu'un milieu d'épaisseur  $l$  est d'autant plus limité thermiquement que  $l$  est petit et que la diffusivité est grande et que le temps durant lequel le flux de chaleur est imposé, est grand.

Les méthodes mathématiques d'intégration par les "séries de Fourier" sont utilisées dans le cas où les milieux thermiques sont limités.

**1.1** La formule générale de l'accroissement de température  $\Delta\theta$  au point d'abscisse  $x$ , au temps  $t$ , dans le cas d'un flux constant  $q_0$  de la chaleur tombant sur la face frottante s'écrit :

$$\Delta\theta = \frac{2q_0 l}{\pi^2 \lambda} \cdot \left[ \frac{m t}{2} + \frac{\pi^2}{6} - \left( \cos \frac{\pi x}{l} \cdot e^{-m t} + \dots + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n \pi x}{l} e^{-n^2 m t} \right) + \frac{\pi^2 x^2}{4 l^2} - \frac{\pi^2 x}{2 l} \right]$$

où  $l$  est l'épaisseur du milieu

$m$  la quantité  $\pi^2 a / l^2$  où  $a = \lambda / \rho c$  est la diffusivité thermique

$\lambda$  le coefficient de conductivité thermique du milieu

$\rho$  la masse volumique du milieu

$c$  la chaleur spécifique du milieu

Dans le cas le plus général d'un flux de chaleur variable  $q$ , l'application des mêmes méthodes permet le calcul à partir de la formule générale :

$$\Delta\theta = F(x, t, q_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial q} F(x, t - \tau, q_\tau) \frac{dq}{d\tau} d\tau$$



où  $F(x,t,q_0)$  est la formule établie précédemment dans le cas où le flux est constant et égal à  $q_0$ .

Par dérivation par rapport à  $q$ , puis par intégration par rapport à la variable  $t$  on obtient ainsi, pour le cas où le flux variable  $q$  est de la forme  $q = q_0 - \alpha t$  (flux linéairement décroissant)

$$\Delta\theta = \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \cdot \left[ \frac{\pi^2}{4\ell^2} x^2 (q_0 - \alpha t) - \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{x}{\ell} (q_0 - \alpha t) + \frac{mt}{2} \left( q_0 - \frac{\alpha t}{2} \right) - \right. \\ \left. - q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\pi \frac{x}{\ell} \cdot e^{-n^2 mt} + \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos n\pi \frac{x}{\ell} - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos n\pi \frac{x}{\ell} e^{-n^2 mt} + \frac{\pi^2}{6} (q_0 - \alpha t) \right]$$

formule qui permet, en toute abscisse  $x$  dans le matériau frottant, de connaître la température au temps  $t$  depuis le début du freinage ( $t = 0$ ), jusqu'à la fin du freinage ( $t = q_0/\alpha$ ). On peut l'appliquer particulièrement au cas de la face frottante  $x = 0$ , et au cas de la face dorsale  $x = 1$ , pour le cas du flux linéairement décroissant et aussi pour le cas du flux constant quand  $\alpha = 0$ .

Nous obtenons ainsi un certain nombre de formules, plus simples que la formule générale que nous pouvons appliquer en nous limitant aux premiers termes des séries.

## 1.2

### - Pour la surface frottante $x = 0$

Une bonne précision , dans le cas où  $mt$  est compris entre 1,25 et 6, est obtenue avec la formule :

$$\frac{\Delta\theta}{q_0} = \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \left[ \frac{mt}{2} \left( 1 - \frac{t}{2T} \right) + \frac{\pi^2}{6} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) + \frac{1}{mT} \left( \frac{\pi^4}{90} - e^{-mt} \right) - e^{-mt} \right]$$

$$T = q_0/\alpha$$

La limite de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  étant  $\frac{\pi^4}{90}$  ( cf annexe 2 )

### - Pour la surface dorsale $x = 1$

Une bonne précision, dans le cas où le paramètre  $mt$  est compris entre 1 et 1,25, est obtenue avec la formule approchée suivante :

$$\frac{\Delta\theta}{q_0} = \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \left[ \frac{mt}{2} \left( 1 - \frac{t}{2T} \right) - \frac{\pi^2}{12} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) + e^{-mt} - \frac{1}{mT} \left( \frac{7\pi^4}{720} \cdot e^{-mt} \right) \right]$$

A partir de la formule générale, par transformation grâce à la théorie des fonctions d'erreurs, on peut retrouver la formule du milieu illimité quant  $mt$  est petit (cf Annexe 3 )

Cette température de surface est intéressante à connaître dans trois conditions qui permettront de définir avec quelque exactitude la courbe entière de  $\Delta\theta$  en fonction du temps:

### 1.3

- a / Dans les premiers instants du freinage.

Le milieu est alors illimité, la courbe s'y confond avec celle de la formule correspondante :

$$\Delta\theta = \frac{2q_0\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \left(1 - \frac{2t}{3T}\right)$$

$$\left[\frac{d(\Delta\theta)}{dt}\right]_{t=0} = \infty \longrightarrow \text{ce qui signifie qu'aux premiers instants du freinage, nous aurons une}$$

montée brutale de la température, avec tangente infinie à l'origine sur le graphe représentant l'évolution de cette température.

- b / Au milieu du coup de frein, à l'instant où  
 $t = T/2 = q_0/2\alpha$

En milieu illimité, on obtient un point remarquable qui correspond au maximum de la valeur de  $\Delta\theta$ .

Avec  $x = 0$  et  $t = T/2$  dans la formule générale (en sortant le flux initial  $q_0$  en facteur dans tous les termes puisque  $T = q_0/\alpha$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta}{q_0} = & \frac{3T}{8\ell\rho c} + \frac{\ell}{6\lambda} + \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \cdot \frac{1}{mT} \cdot \frac{\pi^4}{90} - \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 m T/2} \\ & - \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \cdot \frac{1}{mT} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 m T/2} \end{aligned}$$

- c / A la fin du coup de frein, à l'instant  $t=T=q_0/\alpha$

En milieu illimité, apparaît un autre point remarquable car  $\Delta\theta$  est  $\sqrt{2}$  fois plus petit que celle du maximum correspondant à l'instant  $t = T/2$ , il en résulte :

$$\frac{\Delta\theta}{q_0} = \frac{T}{2\rho c} + \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \cdot \frac{1}{mT} \cdot \frac{\pi^4}{90} - \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 mT} -$$

$$- \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \cdot \frac{1}{mT} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 mT}$$

#### 1.4 DIFFERENCES chiffrées entre les températures atteintes en milieu LIMITE et en milieu ILLIMITE .

Premier cas : Tambour de frein d'automobile en fonte :  $\lambda = 0,11$  ;  $\rho = 7,2$  ;  $c = 0,12$  ( CGS ). Freinage de 5 secondes avec un flux initial  $q_0$ . L'épaisseur de la jante est 1.

TABLEAU DES RESULTATS

| l<br>cm | m    | t = T/2 |                              |                                |               | t = T |                              |                                |               |
|---------|------|---------|------------------------------|--------------------------------|---------------|-------|------------------------------|--------------------------------|---------------|
|         |      | mT/2    | $\Delta\theta/q_0$<br>limité | $\Delta\theta/q_0$<br>illimité | $\epsilon \%$ | mT    | $\Delta\theta/q_0$<br>limité | $\Delta\theta/q_0$<br>illimité | $\epsilon \%$ |
| 0,6     | 3,48 | 8,7     | 4,6                          |                                | 20            | 17,4  | 4,88                         |                                | 42            |
| 0,8     | 1,96 | 4,9     | 4,08                         |                                | 5             | 9,8   | 3,78                         |                                | 36            |
| 1       | 1,25 | 3,14    | 3,90                         | 3,86                           | 1             | 6,28  | 3,2                          | 2,73                           | 17            |
| 1,2     | 0,87 | 2,18    | 3,87                         |                                | 0,5           | 4,36  | 2,92                         |                                | 7             |
| 1,5     | 0,56 | 1,39    | 3,86                         |                                | 0             | 2,68  | 2,77                         |                                | 2             |

Deuxième cas : Disque de frein d'avion (essai FERODO)

$$( \lambda = 0,11 ; \rho = 7,2 ; c = 0,1 \text{ CGS } )$$

Ce disque de demi épaisseur  $l = 0,55 \text{ cm}$ , frotté sur ses deux faces, est freiné pendant un temps total de 11 secondes en présence d'un flux de chaleur initial  $q_0 = 71 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s}$ .

Au temps  $t = T/2$ , le calcul donne  $\Delta\theta/q_0 = 7,9$  contre 5,45 en milieu illimité soit un écart de 45 %, ceci se traduit par une température de surface réelle de  $560^\circ\text{C}$  ( contre  $390^\circ\text{C}$  )

Au temps  $t = T$ , le calcul donne  $\Delta\theta/q_0 = 10$  contre 3,85 , soit un écart de 160 %, ce qui correspond à une température de surface réelle de  $706^\circ\text{C}$  (contre  $275^\circ\text{C}$  ).

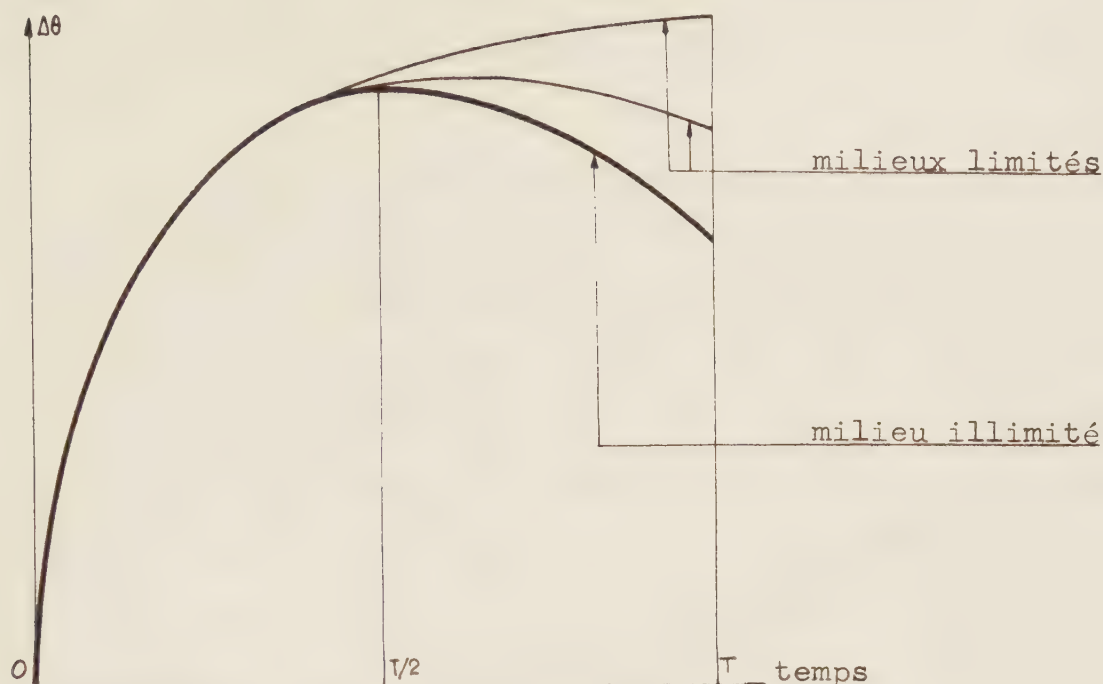
Troisième cas : Tambour de frein de moto.

Soit un tambour de frein de moto dont les caractéristiques sont :  $\lambda = 0,11 ; \rho = 7,2 ; c = 0,12 \text{ CGS}$  et d'épaisseur  $l = 0,3 \text{ cm}$ .

Après une durée totale de freinage de 5 secondes, l'écart par rapport au milieu illimité au temps  $T/2$  est de 85 % et de 225 % au temps  $T$ . Ces écarts sont considérables et correspondent finalement à des températures très élevées dans des cas de freinage sévère.

A ces écarts par rapport à ceux du milieu illimité correspond une déformation de la courbe théorique, dont on

s'éloigne de plus en plus à mesure que le milieu est plus limité.



## 1.5 VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

Ces vérifications expérimentales ont été effectuées par la S.A.F. du FERODO.

Celles-ci ont eu lieu, en utilisant l'appareil de mesure instantanée de température de surface à cellule au sulfure de plomb, dans des cas divers.

- Sur freins à disque d'avions où on est toujours en milieu thermique franchement limité.

- Sur freins à disque d'automobiles, à disque en fonte, où le milieu est toujours limité également mais où on fonctionne à des températures moins élevées que dans les freins d'avions.



Ces essais ont donné une bonne vérification expérimentale des formules données précédemment avec des écarts allant de 3 à 10 % .

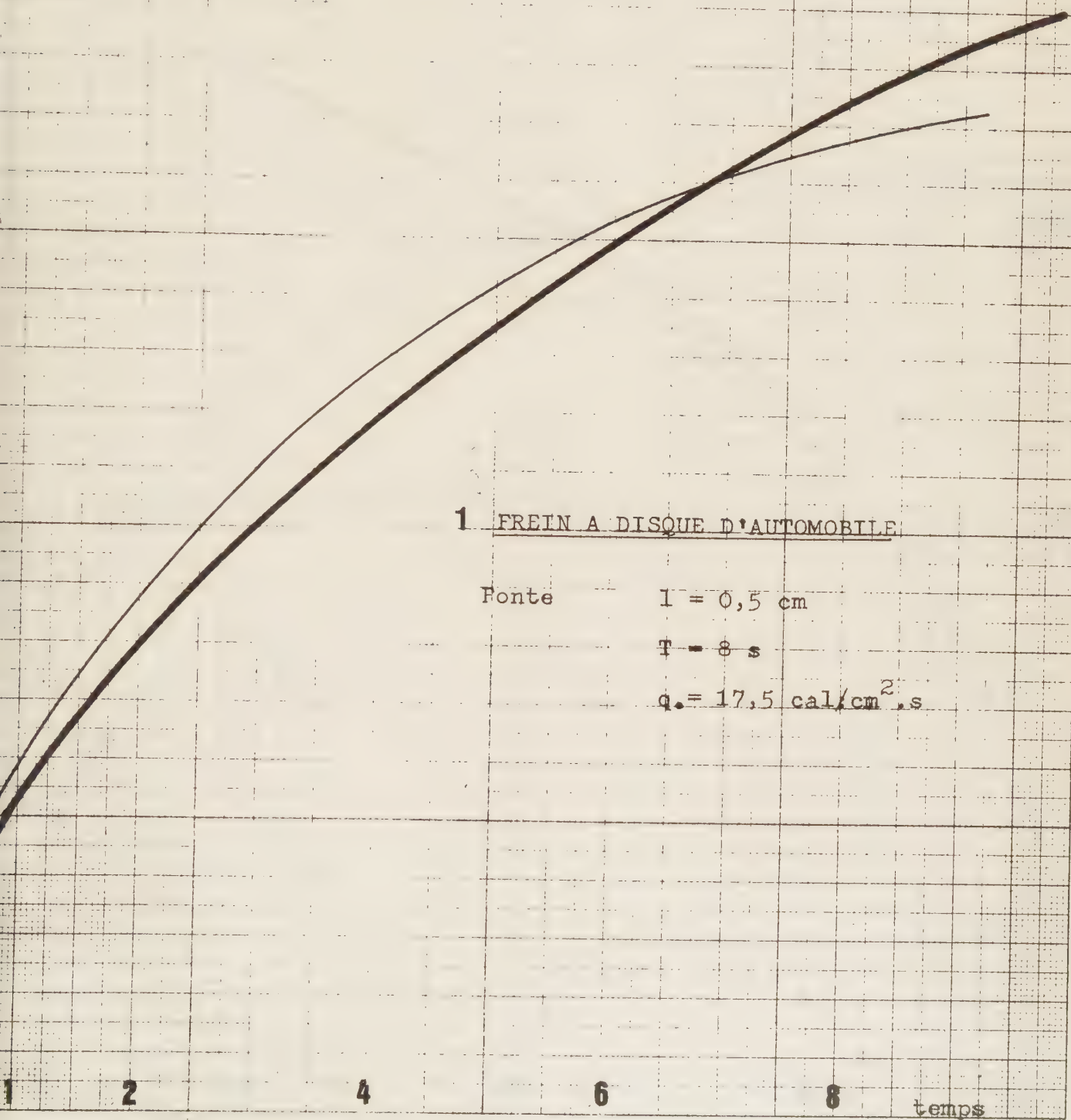
Malgré les difficultés expérimentales en ce qui concerne l'étalonnage, la connaissance exacte de l'énergie libérée par le freinage et le partage de la chaleur entre les matériaux, ces écarts sont acceptables. En outre, le freinage n'est pas toujours rigoureusement à décélération constante, par ailleurs il faut faire une moyenne sur un assez grand nombre de coups de freins afin d'éliminer l'influence locale des points chauds et tenir compte des pertes par rayonnement, enfin il existe une certaine incertitude concernant les constantes thermiques dont la variation avec la température a été négligée.

Toutefois, il semble que la bonne concordance des essais avec le calcul montre que l'influence du rayonnement est faible dans la zone 0 - 700°C prospectée, en raison des temps de freinage relativement brefs.

Les résultats obtenus lors de ces divers essais ont été reportés sur les courbes suivantes ( documents FERODO )

— courbe expérimentale

— courbe théorique



1 FREIN A DISQUE D'AUTOMOBILE

Ponte

$l = 0,5 \text{ cm}$

$T = 8 \text{ s}$

$q. = 17,5 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s}$

$\Delta\theta_s$ 

courbe expérimentale

courbe théorique

300

200

## 2 FREIN A DISQUE D'AUTOMOBILE

Fonte

 $l = 0,5 \text{ cm}$  $T = 14,5 \text{ s}$  $q_0 = 22,5 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s}$ 

5

10

15

temps

— courbe expérimentale  
— courbe théorique

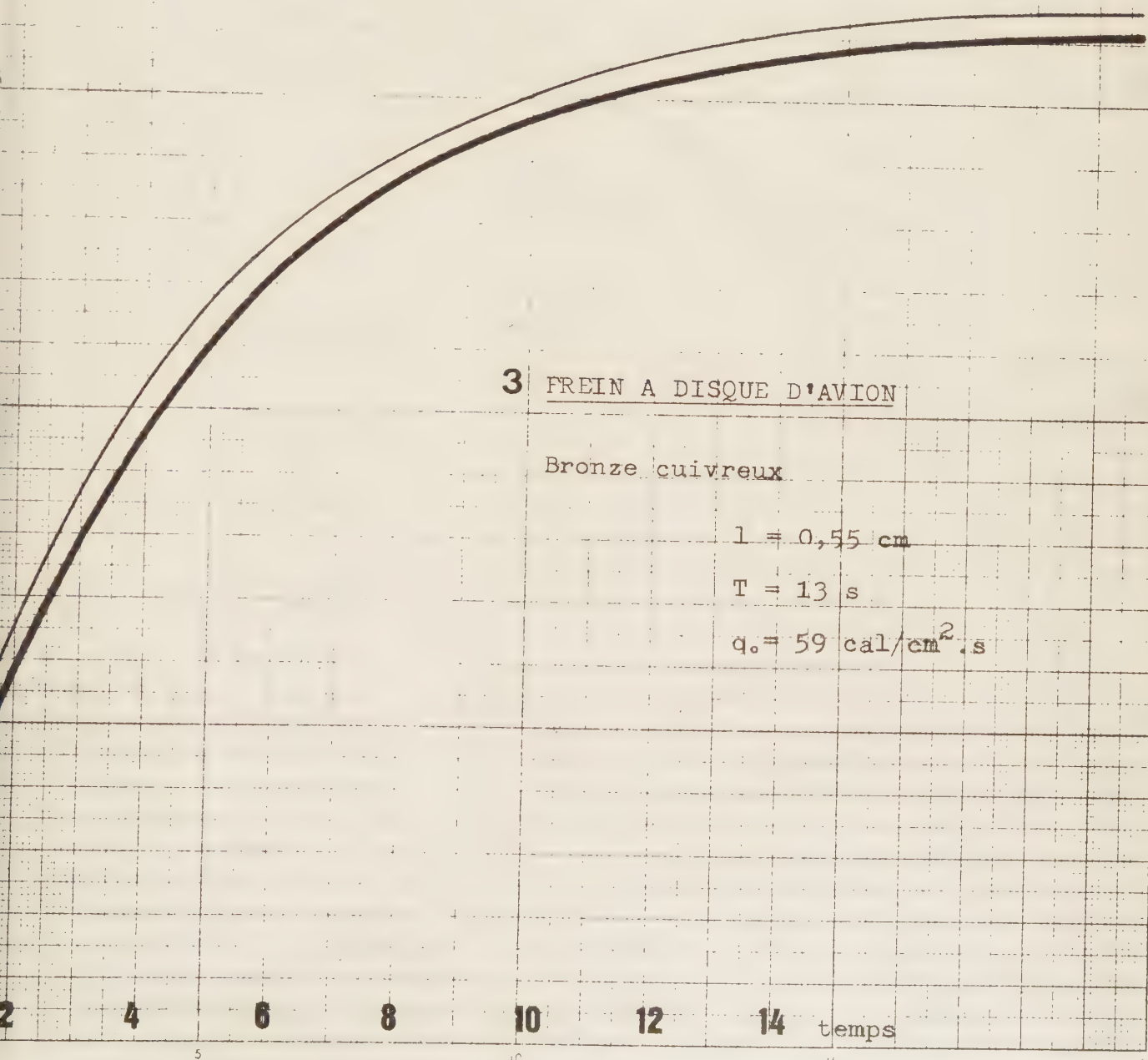
### 3 FREIN A DISQUE D'AVION

Bronze cuivreux

$$l = 0,55 \text{ cm}$$

$$T = 13 \text{ s}$$

$$q_0 = 59 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s}$$





$\Delta\theta_s$

600

400

200

— courbe expérimentale  
— courbe théorique

4 FREIN A DISQUE D'AVION

Acier chromé

$l = 0,55 \text{ cm}$

$T = 13,5 \text{ s}$

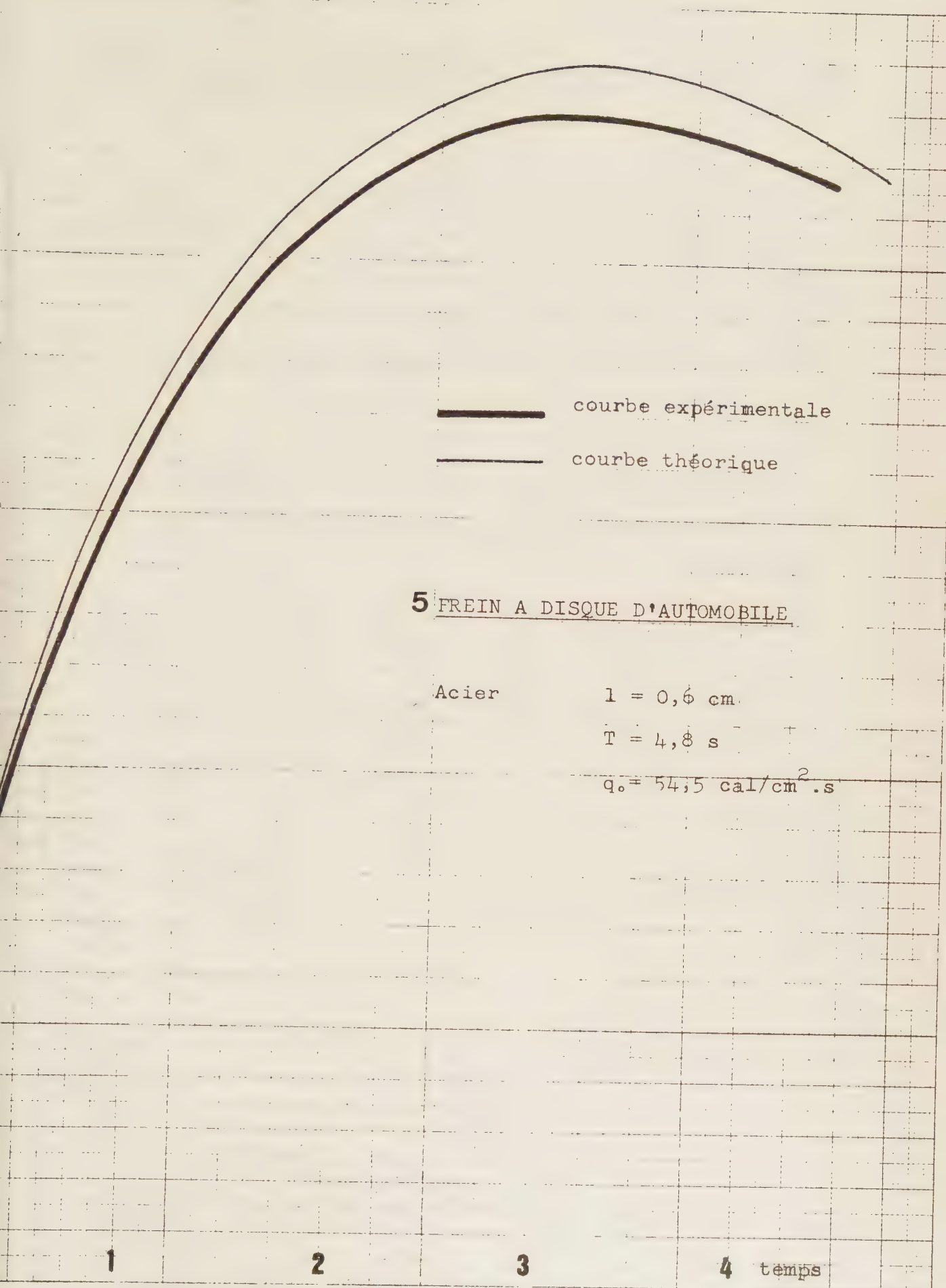
$q_0 = 63 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s}$

4

8

12

temps





## 2

### LIAISON ENTRE LE MILIEU LIMITE ET LE MILIEU ILLIMITE

**2.1** L'étude thermique en milieu illimité, considérée sous sa forme générale, met en évidence l'importance dans les valeurs atteintes en surface du nombre de Fourier  $x^2/4at$ , en montrant que dès que cette quantité (qui, appliquée à la face dorsale devient  $l^2/4at$ ) devient assez grande, on se trouve pratiquement en milieu illimité.

En effet, la formule générale servant au calcul de la température de surface en milieu illimité est pour un flux  $q$  quelconque :

$$\Delta\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \int_0^t q(\tau) \frac{e^{-x^2/4a(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

qui, explicitée dans le cas du flux  $q = q_0 - \alpha t$  conduit à :

$$\Delta\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \int_0^t \left[ q_0 - \alpha(t-\tau) \right] \frac{e^{-x^2/4a(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

soit après intégration par parties :

$$\Delta\theta = \frac{2\sqrt{t} \cdot e^{-x^2/4at}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\lambda\rho c}} \left[ q_0 - \frac{2}{3}\alpha t \left( 1 + \frac{x^2}{4at} \right) \right] - \frac{x}{\lambda} \left[ q_0 - \alpha t \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{4at} \right) \right] \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

$$\operatorname{erfc} x/2\sqrt{at} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{at}} e^{-\xi^2} d\xi$$

$\operatorname{erfc} x/2\sqrt{at}$  tend vers 0 quand  $x/2\sqrt{at}$  ( ou  $x^2/4at$  ) est grand.

Cette propriété conduit à rechercher pour un matériau de caractéristiques données ( $\lambda, \rho, c, a$ ) recevant un flux de chaleur  $q = q_0 - \alpha t$  pendant un temps  $T = q_0/\alpha$  (durée totale de freinage) quel rapport existe entre la température de surface quand l'épaisseur di disque est  $l$  et quand cette épaisseur est infinie, ceci en rapport avec la quantité  $l^2/4at$ .

Un tel calcul peut être fait particulièrement aux instants  $t = T/2$  et  $t = T$  précédemment considérés.

Ce calcul a été fait pour des matériaux de caractéristiques différentes :

|           | $\lambda$ | $\rho$ | $c$  | $a$   | $b$  |
|-----------|-----------|--------|------|-------|------|
| Acier     | 0,11      | 7,8    | 0,12 | 0,12  | 0,32 |
| Fonte     | 0,11      | 7,2    | 0,13 | 0,125 | 0,31 |
| Aluminium | 0,5       | 2,7    | 0,2  | 0,925 | 0,52 |
| Cuivre    | 0,85      | 8,6    | 0,11 | 0,9   | 0,90 |

Ces caractéristiques sont données en unités CGS.

Ce qui conduit aux écarts relatifs suivants entre le milieu limité et le milieu illimité, un écart de 30 par

exemple signifiant que la température de surface du milieu limité ( $\lambda, \rho, c$ ) d'épaisseur  $l$ , de caractéristique  $l^2/4at$  est 30 % supérieure à celle du même matériau ( $\lambda, \rho, c$ ) en milieu illimité.

| ECARTS RELATIFS à l'instant $t = T/2$ |       |       |        |           |
|---------------------------------------|-------|-------|--------|-----------|
| $l^2/4at$                             | Fonte | Acier | Cuivre | Aluminium |
| 0,025                                 | 130   | 135   | 136    | 136       |
| 0,05                                  | 70    | 71    | 73     | 72        |
| 0,1                                   | 31    | 31    | 32     | 33        |
| 0,2                                   | 9     | 10    | 10     | 10        |
| 0,3                                   | 3     | 3     | 3      | 3         |
| 0,4                                   | 1,5   | 1,5   | 1,5    | 1,5       |

| ECARTS RELATIFS à l'instant $t = T$ |       |       |        |           |
|-------------------------------------|-------|-------|--------|-----------|
| $l^2/4at$                           | Fonte | Acier | Cuivre | Aluminium |
| 0,025                               | 325   | 325   | 325    | 325       |
| 0,5                                 | 195   | 198   | 200    | 195       |
| 0,1                                 | 115   | 114   | 114    | 114       |
| 0,2                                 | 52    | 54    | 52     | 52        |
| 0,3                                 | 31    | 29    | 31     | 29        |
| 0,4                                 | 17    | 17    | 17     | 17        |
| 0,5                                 | 10    | 10    | 10     | 10        |
| 0,6                                 | 6     | 6     | 6      | 6         |
| 0,7                                 | 3,5   | 3,5   | 3,5    | 3,5       |
| 0,8                                 | 1,5   | 1,5   | 1,5    | 1,5       |

Ces résultats montrent bien, à la précision des calculs près la propriété de l'écart relatif entre la température moyenne de surface d'un matériau ( $\lambda, \rho, c$ ) d'épaisseur  $l$ , et celle du même matériau d'épaisseur infinie soumis à la même loi de flux de chaleur (mêmes conditions de freinage).

Cet écart ne dépend, au temps  $t = T/2$  et  $t = T$ , que de la quantité  $l^2/4at$  (Démonstration de cette propriété à l'annexe 4)

Dans le cas des freins à disque,  $l$  représente la DEMI EPAISSEUR du disque.

L'intérêt de ce résultat sera, que pour toute application pratique, nous pourrons, connaissant la relation d'écart relatif établie une fois pour toute, construire la courbe des températures de surface à partir des seules formules simples du milieu illimité, en évitant les calculs des séries de Fourier.

## 2.2 APPLICATION: Calcul des températures de surface.

a/ On calcule les températures aux temps  $t = T/2$  et  $t = T$  (cette dernière étant  $\sqrt{2}$  fois plus petite que celle au temps  $t = T/2$ ) en milieu illimité

$$\Delta\theta = \frac{4}{3\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\lambda\rho c}} \cdot q_0 \cdot \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2}} \quad \text{au temps } T/2$$

b/ On majore chacune des températures obtenues, pour le  $l^2/4aT$  caractéristique, du chiffre relatif tiré des tableaux précédents ou des courbes de la page 97.

## 2.3 Recherche de l'épaisseur imposée par la température de surface:

Détermination de l'épaisseur à prendre pour ne pas dépasser, avec un matériau donné soumis à un loi de flux de chaleur (  $q_0$ ,  $T$  ), une valeur de la température de surface incompatible avec ses propriétés de frottement et d'usure.

La courbe de correspondance montre que pour la température de surface en freinage, l'influence de la limitation du milieu est faible dès que  $l^2/4aT$  atteint les valeurs de 0,2 ou 0,3 en raison du faible écart relatif au temps  $T/2$ .

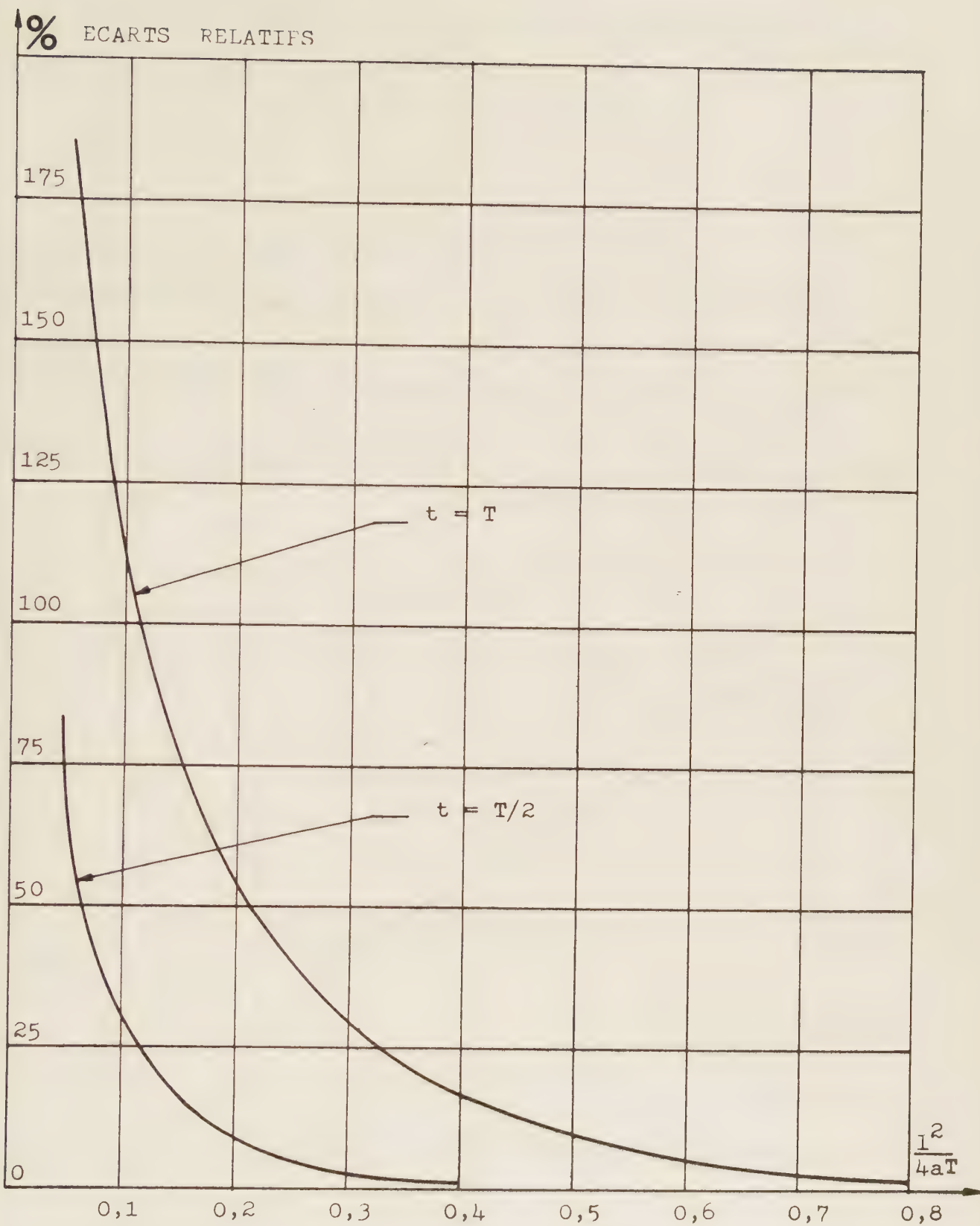
## 3 APPLICATION DE CETTE ETUDE au véhicule simulé au banc d'essai

### 3.1 CALCUL DU FLUX INITIAL $q_0$

Supposons que le véhicule simulé roule à la vitesse  $V'$  en km/h au moment où on applique le coup de frein.

L'énergie cinétique du véhicule est :

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 \quad V \text{ en m/s}$$





soit pour le modèle simulé :

$$E_c = \frac{1}{2} m_o V^2 = 100 ( V' / 3,6 )^2$$

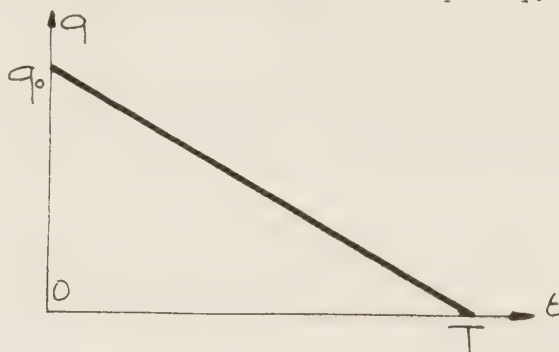
$$= 7,73 V'^2$$

Soit S la surface par laquelle passera le flux thermique q, égale à la surface totale de contact garniture-disque. Nous supposons que la pression est constante entre les garnitures et le disque sur la surface de contact.

La durée totale de freinage à décélération constante est donnée par l'expression :

$$T = V' / 3,6 \times 9,26 = V' / 33,4 \text{ secondes}$$

Nous avons considéré précédemment que nous avions un flux linéairement décroissant :  $q = q_o - \alpha t$



Nous avons donc :

$$q_o T / 2 = E_c / S$$

$$q_o = 2 E_c / T.S = \frac{2 \times 7,73 \times V'^2 \times 33,4}{V' \times S} = 51,6 V' / S = q_o$$

$V'$  en km/h

$S$  en  $m^2$

Nous obtenons comme valeurs du flux initial pour les vitesses :

$$\begin{array}{ll} V' = 100 \text{ km/h} & q_0 = 7,6 \cdot 10^6 \text{ J/m}^2\text{s} \\ V' = 200 \text{ km/h} & q_0 = 15,2 \cdot 10^6 \text{ J/m}^2\text{s} \\ V' = 285 \text{ km/h} & q_0 = 21,6 \cdot 10^6 \text{ J/m}^2\text{s} \end{array}$$

### 3.2 DETERMINATION DE LA LOI DE FLUX

L'expression du flux de chaleur linéairement décroissant est :

$$q = q_0 - \alpha t \quad \alpha = q_0 / T = 2,54 \cdot 10^6$$

soit :  $q = q_0 - 2,54 \cdot 10^6 \cdot t$

Exprimée en fonction de la vitesse initiale en km/h et de la surface de contact disque-garnitures, cette relation devient :

$$q = 51,6 \frac{V'}{S} - 15,46 \frac{V'^2}{S} \cdot t$$

Pour les vitesses suivantes, nous obtenons donc comme loi de flux de chaleur :

$$\begin{array}{ll} V' = 100 \text{ km/h} & q = 7,6 \cdot 10^6 - 2,54 \cdot 10^6 \cdot t \\ V' = 200 \text{ km/h} & q = 15,2 \cdot 10^6 - 2,54 \cdot 10^6 \cdot t \\ V' = 285 \text{ km/h} & q = 21,6 \cdot 10^6 - 2,54 \cdot 10^6 \cdot t \end{array}$$

q étant exprimé en  $\text{J/m}^2\text{s}$

### 3.3

#### DETERMINATION DES TEMPERATURES DE SURFACE de contact disque-garnitures

On détermine l'écart entre la température de surface de contact disque-garnitures et la température ambiante en considérant les hypothèses suivantes :

- Le recouvrement de la bande de frottement par les garnitures est total.
- La pression de contact entre les garnitures et le disque est uniforme et constante.
- Dans ce premier calcul, le milieu thermique est limité.

Dans ce cas, la valeur de l'accroissement de température de surface est donnée par la relation :

$$\Delta\theta_s = \frac{2.q_0\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \left( 1 - \frac{2}{3T} t \right)$$

Comme on considère le recouvrement total de la bande de frottement par les garnitures, la nouvelle valeur du flux de chaleur initial sera différente de celle calculée précédemment et sera égale à cette dernière multipliée par le rapport de la surface active des garnitures sur la surface totale de la bande de frottement soit 0,135 pour le type de plaquettes utilisées.

$$q_1 = 0,135 q_0$$

$q_0$  étant la valeur du flux de chaleur dans le cas d'un recouvrement partiel.

Pour la fonte, le coefficient d'effusivité  $\sqrt{\lambda \rho c}$  a comme valeur :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 50 \text{ J/m.s.}^{\circ}\text{K} \\ c = 560 \text{ J/kg.}^{\circ}\text{K} \\ \rho = 7,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \end{array} \right\} \longrightarrow \sqrt{\lambda \rho c} = 14,2 \cdot 10^3$$

Le coefficient d'effusivité étant exprimé en  $\text{J.m}^{-2}.\text{s}^{1/2}.\text{K}^{-1}$

Nous aurons comme expression de  $\Delta\theta_s$  pour un véhicule simulé allant à la vitesse de :

$$\begin{aligned} - V' = 100 \text{ km/h} \rightarrow \Delta\theta_s &= \frac{2 \times 7,6 \cdot 10^6 \times 0,135}{\sqrt{\pi} \times 14,2 \cdot 10^3} \sqrt{t} (1 - 2t/9) = \\ &= 81 \quad t (1 - 0,222 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - V' = 200 \text{ km/h} \rightarrow \Delta\theta_s &= \frac{2 \times 15,2 \cdot 10^6 \times 0,135}{\sqrt{\pi} \times 14,2 \cdot 10^3} \sqrt{t} (1 - t/9) \\ &= 162 \quad t (1 - 0,111 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - V' = 285 \text{ km/h} \rightarrow \Delta\theta_s &= \frac{2 \times 21,6 \cdot 10^6 \times 0,135}{\sqrt{\pi} \times 14,2 \cdot 10^3} \sqrt{t} (1 - 2t/25,5) \\ &= 230 \quad t (1 - 0,0785 t) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant déterminer l'écart relatif entre la température de surface de contact en milieu thermique limité et la température de surface de contact en milieu thermique illimité. Pour cela, nous devons calculer la valeur du nombre de Fourier  $l^2/4aT$  pour les différentes valeurs de la vitesse du véhicule simulé :

- $V' = 100 \text{ km/h} \rightarrow l^2/4aT = (5.10^{-3})^2/4 \times 0,124.10^{-4} \times 3 = 0,170$
- $V' = 200 \text{ km/h} \rightarrow l^2/4aT = (5.10^{-3})^2/4 \times 0,124.10^{-4} \times 6 = 0,084$
- $V' = 285 \text{ km/h} \rightarrow l^2/4aT = (5.10^{-3})^2/4 \times 0,124.10^{-4} \times 8,5 = 0,060$

Ces valeurs du nombre de Fourier  $l^2/4aT$  sont calculées pour une épaisseur du disque de 10 mm soit  $l$  ( demi épaisseur ) égal 5 mm.

Reportons ces valeurs sur le graphe donnant les écarts relatifs en fonction de  $l^2/4aT$ , pour les deux valeurs du temps,  $t = T/2$  et  $t = T$ .

Nous obtenons :

- $V' = 100 \text{ km/h}$       écarts en %       $\left\{ \begin{array}{ll} t = 1,5 \text{ s} & \mathcal{E} = 14 \% \\ t = 3 & \mathcal{E} = 68 \% \end{array} \right.$
- $V' = 200 \text{ km/h}$        $\left\{ \begin{array}{ll} t = 3 & \mathcal{E} = 33 \% \\ t = 6 & \mathcal{E} = 122 \% \end{array} \right.$
- $V' = 285 \text{ km/h}$        $\left\{ \begin{array}{ll} t = 4,25 & \mathcal{E} = 60 \% \\ t = 8,5 & \mathcal{E} = 180 \% \end{array} \right.$

L'écart de température entre la surface de contact et le milieu ambiant en milieu thermique limité est égal à :

$$\Delta\theta_s = \Delta\theta_{\text{illi}} (1 + \mathcal{E})$$

|                                 | $V' = 100 \text{ km/h}$ |         | $V' = 200 \text{ km/h}$ |         | $V' = 285 \text{ km/h}$ |           |
|---------------------------------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|-------------------------|-----------|
|                                 | $t = 1,5$               | $t = 3$ | $t = 3$                 | $t = 6$ | $t = 4,25$              | $t = 8,5$ |
| $\Delta\theta_{\text{s illi.}}$ | 66                      | 47      | 187                     | 132     | 316                     | 224       |
| $\Delta\theta_{\text{s lim.}}$  | 75                      | 79      | 248                     | 296     | 505                     | 626       |

Nous obtenons ainsi les graphes des pages 105, 106 et 107 la courbe en trait fin représentant la température de surface de contact en supposant le milieu thermique illimité et celle en trait fort la température de surface de contact en milieu thermique limité, pour une épaisseur du disque de 10 mm.

Examinons le cas où le disque a 14 mm d'épaisseur. Ceci nous permettra de voir l'influence de  $l$  sur la température de la surface de contact en milieu limité.

Pour cette valeur de  $l$ , le nombre de Fourier prend les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 - V' = 100 \text{ km/h} &\rightarrow l^2/4aT = (7 \cdot 10^{-3})^2/4 \times 0,124 \cdot 10^{-4} \times 3 = 0,320 \\
 - V' = 200 \text{ km/h} &\rightarrow l^2/4aT = (7 \cdot 10^{-3})^2/4 \times 0,124 \cdot 10^{-4} \times 6 = 0,165 \\
 - V' = 285 \text{ km/h} &\rightarrow l^2/4aT = (7 \cdot 10^{-3})^2/4 \times 0,124 \cdot 10^{-4} \times 8,5 = 0,115
 \end{aligned}$$

Reportons ces valeurs de  $l^2/4aT$  sur le graphe donnant les écarts relatifs en fonction du nombre de Fourier pour les deux valeurs du temps,  $t = T/2$  et  $t = T$ .

Nous obtenons comme écarts relatifs :

|                           |             |                     |        |
|---------------------------|-------------|---------------------|--------|
| - $V' = 100 \text{ km/h}$ | écarts en % | $t = 1,5 \text{ s}$ | = 2 %  |
|                           |             | $t = 3$             | = 24 % |
| - $V' = 200 \text{ km/h}$ |             | $t = 3$             | = 13 % |
|                           |             | $t = 6$             | = 67 % |
| - $V' = 285 \text{ km/h}$ |             | $t = 4,25$          | = 25 % |
|                           |             | $t = 8,5$           | = 97 % |



Ceci permet de calculer  $\Delta\theta_s$  en milieu thermique limité pour les trois valeurs de la vitesse du véhicule simulé :

|                                 | V' = 100 km/h |       | V' = 200 km/h |       | V' = 285 km/h |         |
|---------------------------------|---------------|-------|---------------|-------|---------------|---------|
|                                 | t = 1,5s      | t = 3 | t = 3         | t = 6 | t = 4,25      | t = 8,5 |
| $\Delta\theta_{s\text{ illi.}}$ | 66            | 47    | 187           | 132   | 316           | 224     |
| $\Delta\theta_{s\text{ lim.}}$  | 67            | 59    | 212           | 220   | 396           | 440     |

Reportons ces valeurs sur les graphes des pages suivantes, la courbe en trait fin représentant  $\Delta\theta_s$  en milieu illimité et la courbe en trait mixte  $\Delta\theta_s$  en milieu limité, pour une épaisseur du disque de 14 mm.

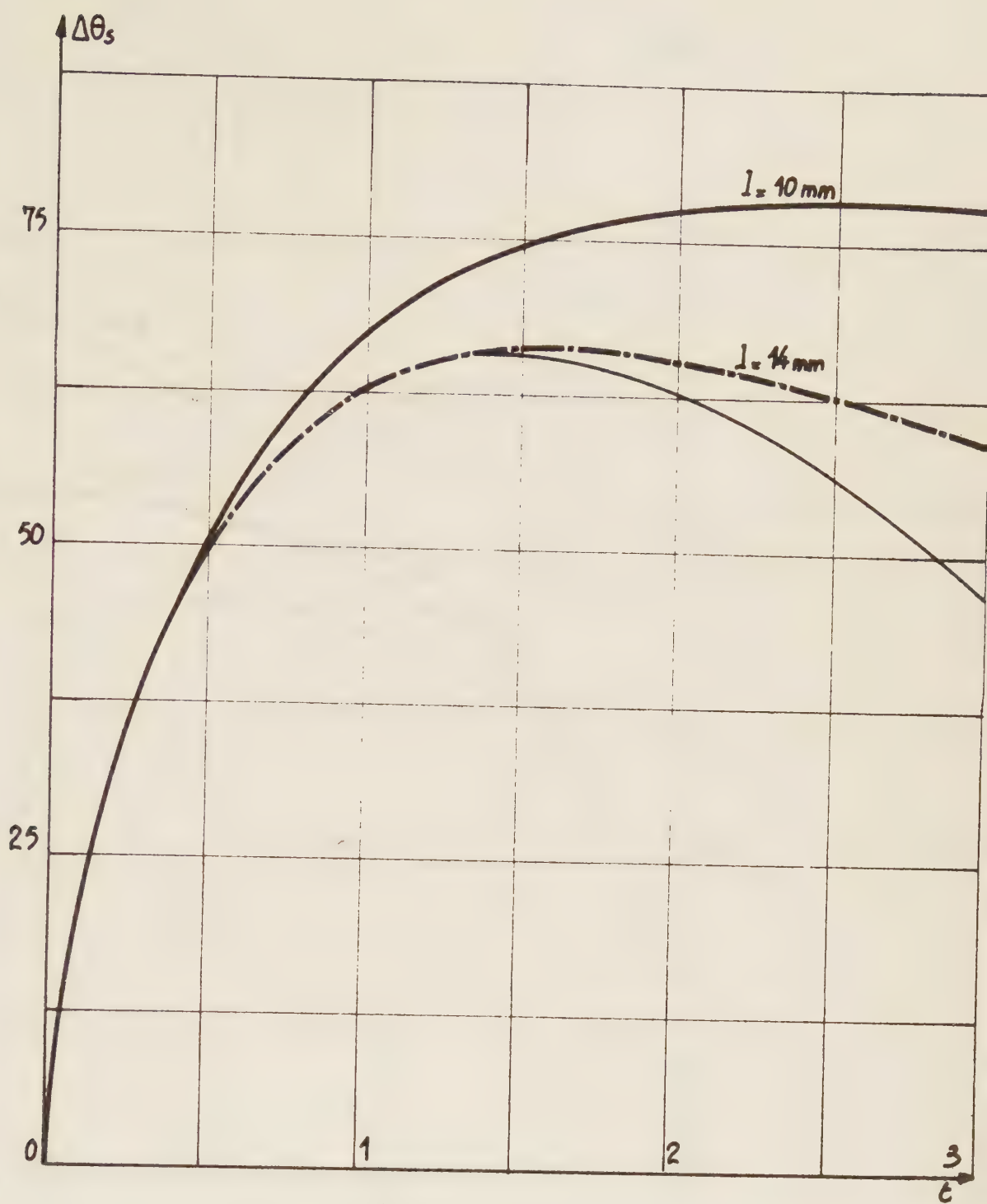
Ces courbes sont tracées en prenant en compte les temps théoriques de freinage.

Avec les temps réels de freinage enregistrés précédemment, la courbe en milieu thermique illimité et en milieu thermique limité est la même, sensiblement, que dans l'étude faite en tenant compte des temps théoriques de freinage pour les vitesses de 100 et 200 km/h (les temps théoriques et réels étant, à 2 % près identiques), mais est différente pour 285km/h.

Pour cette vitesse l'écart de température en milieu illimité entre la surface de contact et l'ambiante est donné par la relation :

$$\Delta\theta_s = 230\sqrt{t} (1 - 0,0785 \cdot t)$$

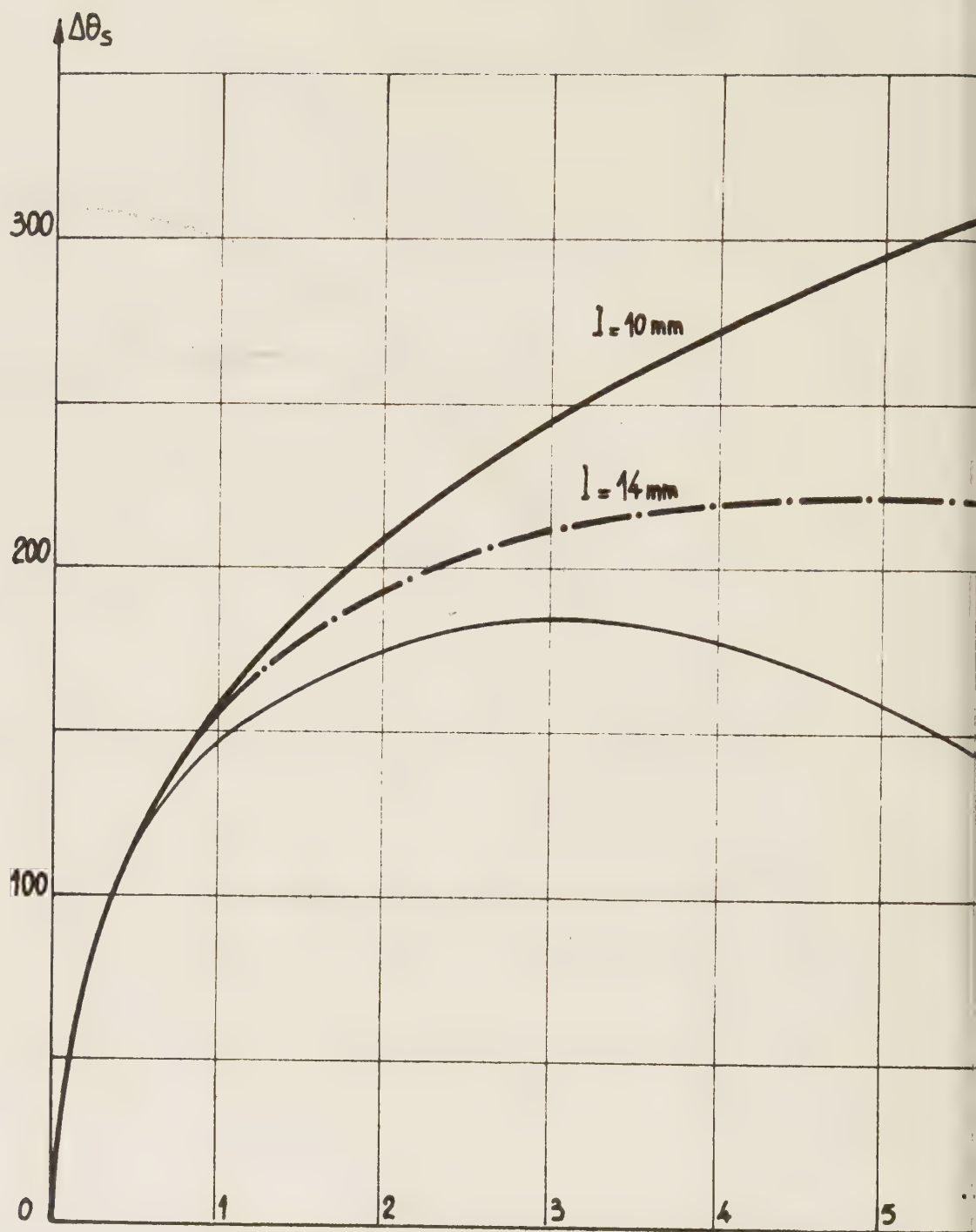
Le temps réel de freinage enregistré a été de 9,8 secondes.



$$T = 3 \text{ s}$$

$$V = 100 \text{ km/h}$$

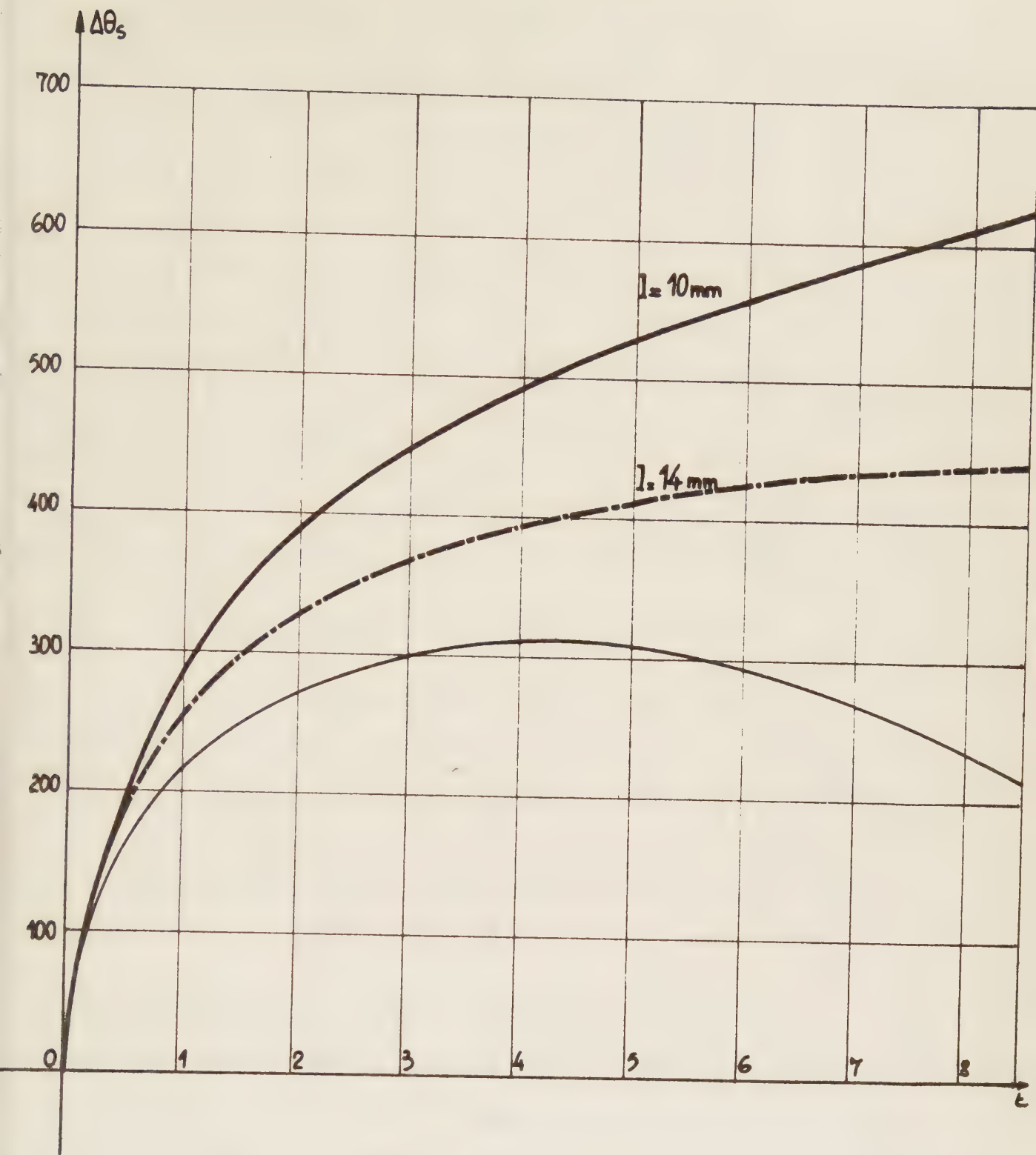
$$\gamma = -9,26 \text{ ms}^{-2}$$



$$T = 6 \text{ s}$$

$$V = 200 \text{ km/h}$$

$$\gamma = -9,26 \text{ ms}^{-2}$$



$$T = 8,5 \text{ s}$$

$$V = 285 \text{ km/h}$$

$$\gamma = -9,26 \text{ ms}^{-2}$$

Nous avons au temps  $t = T/2 = 4,9 \text{ s}$   $\Delta\theta_s = 314^\circ\text{K}$   
 et au temps  $t = T = 9,8 \text{ s}$   $\Delta\theta_s = 166^\circ\text{K}$

Les écarts relatifs étant :

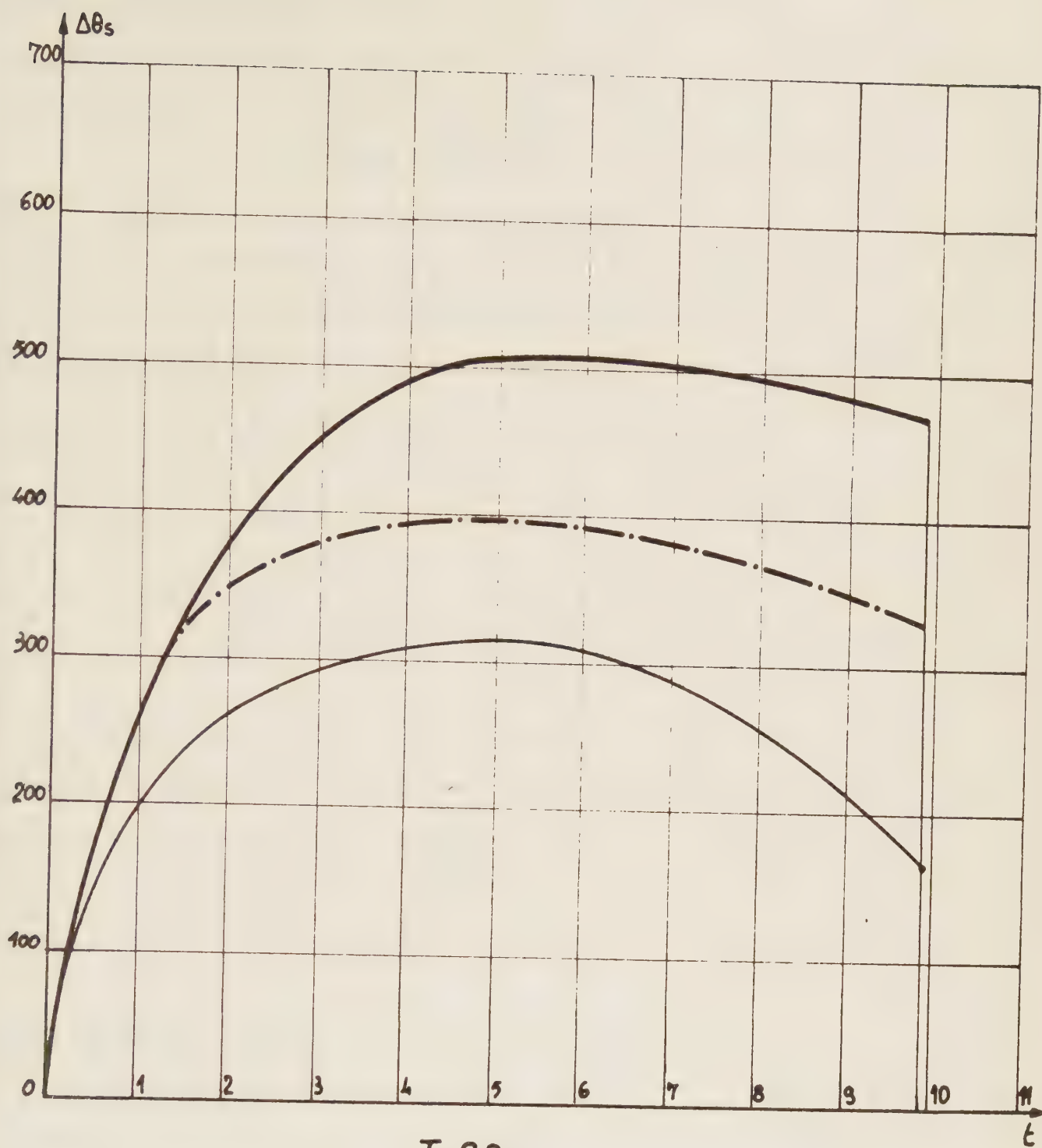
- pour un disque d'épaisseur 10 mm, 60 % à  $T/2$  et 180 % à  $T$ ;
- pour un disque d'épaisseur 14 mm, 25 % à  $T/2$  et 97 % à  $T$ .

|                                  | l = 10 mm |         | l = 14 mm |         |
|----------------------------------|-----------|---------|-----------|---------|
|                                  | t = 4,9   | t = 9,8 | t = 4,9   | t = 9,8 |
| $\Delta\theta_{s, \text{illi.}}$ | 314       | 166     | 314       | 166     |
| $\Delta\theta_{s, \text{lim.}}$  | 502       | 470     | 394       | 330     |

Nous obtenons ainsi les courbes de la figure p<sup>109</sup>

Cette étude a permis de déterminer la température de surface d'un disque de frein et de vérifier expérimentalement les résultats obtenus. Dans ces calculs, nous avons supposé le recouvrement total de la surface de frottement du disque par les garnitures, moyennant certaines hypothèses précédemment précisées concernant la détermination de  $q_0$ .

Nous allons étendre l'étude en considérant l'évolution de la température en fonction du temps, pour tout point d'abscisse  $x$  du disque, compte tenu que pour un disque de caractéristiques données ( $\lambda, \rho, c, l$ ) et pour un temps total de freinage  $T$ , nous connaissons la variation de la température de surface.



$T = 9.8 \text{ s}$

$V = 285 \text{ km/h}$



Nous tiendrons compte de l'échange de chaleur entre la surface du disque non en contact avec les garnitures et le milieu ambiant alors que dans la précédente étude l'échange thermique par convection avait été négligé.

Cette étude sera découpée en deux parties :

- la première dans laquelle nous considérerons le disque comme étant la juxtaposition de deux milieux semi infinis.
- la seconde dans laquelle le disque sera considéré comme étant un milieu limité symétrique.

La limite de ces deux états étant au temps  $T_1$  qui sera la limite de validité de la première partie.

Dans cette première partie, nous étudierons d'abord le cas d'une programmation en température (en surface) constante notée  $\theta_{s1}$ , lors du passage d'un point du disque devant les garnitures puis le cas d'une programmation en température linéairement croissante (cas le plus proche du phénomène réel) .

Nous considérerons dans cette étude un point du disque tel que celui-ci se trouve juste en fin de passage dans l'air et au début du contact avec les garnitures quand le coup de frein est appliqué (nous supposerons que la pression s'établit instantanément dans le circuit de freinage) .

Nous utiliserons les notations suivantes :

$a$  = coefficient de diffusivité en  $m^2.s^{-1}$

$\lambda$  = coefficient de conductivité en  $W.m^{-1}.^{\circ}K$

$c$  = capacité calorifique en  $J.kg^{-1}.^{\circ}K^{-1}$

$\rho$  = masse volumique en  $kg.m^{-3}$

$x$  = abscisse du point considéré dans le disque en m,  
l'axe des abscisses étant parallèle à la direction de propagation du flux de chaleur.

$l$  = épaisseur du disque en m.

$t$  = temps en secondes.

$\theta(x,t)$  = température à l'abscisse  $x$  et au temps  $t$ .

$\bar{\theta}(x,t)$  = transformée de Laplace de  $\theta(x,t)$

$\theta_s$  = température de surface.

$T$  = temps total de freinage.

## B

Nous commencerons cette partie par l'étude de l'évolution de la température dans le disque lors du premier passage d'un point particulier de celui ci (précédemment défini) devant les garnitures en considérant le milieu limité et symétrique.

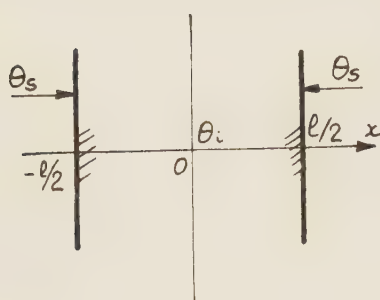
Nous émettons l'hypothèse que le disque se trouve préalablement à la température du milieu ambiant avant l'application du coup de frein, cette température est notée  $\theta_i$ .

Dans ce cas, on fait appel au calcul opérationnel.

La condition initiale est donnée par la relation :

$$\theta(x, 0) = \theta_i$$

ceci quelquesoit  $x$  appartenant à l'intervalle compris entre 0 et  $l/2$ . Nous prenons comme origine des abscisses le milieu du disque.



En raison de la symétrie du modèle, le flux de chaleur est nul au milieu du disque, c'est à dire pour  $x = 0$  et ceci quelquesoit  $t$ , ce qui implique que sur le diagramme des températures en fonction de  $x$ , à  $t$  donné, la tangente à la courbe à  $x = 0$  sera toujours horizontale.

Par ailleurs, nous considérons que nous avons une programmation en température de surface, c'est à dire que cette température est imposée et a pour valeur  $\theta_s$ ; soit :

$\theta(l/2, t) = \theta_s$  ce qui donne en utilisant la transformée de Laplace :

$$\overline{\theta}(l/2, p) = \theta_s/p$$

$$\mathcal{L} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \overline{\theta}(x, p)}{\partial x^2}$$

La transformée de Laplace de la dérivée par rapport à  $t$  de  $\theta(x, t)$  est :

$$\overline{\left( \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \right)} = p \overline{\theta}(x, p) - \theta_i$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x, p)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \left( p \bar{\theta}(x, p) - \theta_i \right)$$

L'équation différentielle de la variable  $x$ ,  $p$  réel positif est :

$$\boxed{\bar{\theta}_{x^2} - \frac{1}{a} p \bar{\theta} = -\frac{1}{a} \theta_i}$$

La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\bar{\theta}_{x^2} - \frac{1}{a} p \bar{\theta} = 0$$

$$r^2 - p/a = 0 \quad \text{nous posons } p/a = q^2$$

$$r^2 = q^2 \quad \text{ce qui donne comme valeurs de } r :$$

$$r_1 = q$$

$$r_2 = -q$$

La solution de l'équation différentielle est :

$$\boxed{\bar{\theta}(x, p) = A(p) \cdot e^{qx} + B(p) \cdot e^{-qx} + \theta_i/p}$$

Au milieu du disque, soit pour  $x = 0$  cette relation devient :

$$\bar{\theta}(0, p) = A(p) + B(p) + \theta_i/p$$

Explicitons la condition exprimant que le flux de chaleur est nul dans le plan de symétrie. ( $x = 0$ )

$$\left[ \frac{\partial \bar{\theta}(x,p)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 = q A(p) - q B(p)$$

ce qui conduit à  $A = B$

La solution de l'équation différentielle se réduit à :

$$\bar{\theta}(x,p) = C'(p) [e^{qx} + e^{-qx}] + \theta_{i/p}$$

soit encore :  $\bar{\theta}(x,p) - \theta_{i/p} = C(p) \operatorname{ch} qx$  (1)

$C(p)$  peut être déterminé en tenant compte de la condition à la limite :

$$\bar{\theta}(l/2, p) = \theta_{s/p}$$

$$\bar{\theta}(l/2, p) = \theta_{s/p} = \theta_{i/p} + C(p) \operatorname{ch} ql/2$$

$$\Rightarrow \theta_s - \theta_i = p C(p) \operatorname{ch} ql/2 \quad (2)$$

Faisons le rapport des équations (1) et (2), nous obtenons alors :

$$\frac{\bar{\theta} - \frac{\theta_i}{p}}{\theta_s - \theta_i} = \frac{\operatorname{ch} qx}{p \operatorname{ch} ql/2} = \frac{\operatorname{ch} qx}{p \operatorname{ch} ql} \quad (3)$$

en posant  $l = 2l'$

Retour à l'original.

Nous recherchons l'original de l'équation (3) en utilisant la méthode de Bromwich.

L'original de  $\bar{\theta} - \theta_{i/p}$  est  $\theta(x,t) - \theta_i$

L'intégrale de Bromwich-Wagner est :

$$\frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\theta_s - \theta_i} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-pt} \frac{\text{ch } qx}{p \cdot \text{ch } ql'} dp = \sum \text{résidus}$$

-a/ Cherchons quel est le résidu du pole  $p = 0$ .

$$\frac{\text{ch } qx \cdot e^{pt}}{p \cdot \text{ch } ql'} \text{ est de la forme : } \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{f(p)}{(p-a)\xi(p)}$$

Cas pour lequel le résidu est :

$$R(a) = \frac{f(a)}{\xi(a)}$$

Pour  $p = 0$ , le résidu esra :

$$R(0) = \frac{\text{ch}(0)}{\text{ch}(0)} \cdot e^0 = 1$$

- b / Cherchons les valeurs de  $p$  pour lesquelles

$$\text{ch } ql = 0 .$$

$$\text{ch } ix = \cos x \quad \text{ce qui implique que}$$

nous avons  $\text{ch } ql = 0$  pour les valeurs de  $q$  suivantes :

$$q = \frac{(2n+1)i\pi}{2l'} = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

$$\text{soit pour } p = +a \left[ \frac{(2n+1)i\pi}{2l'} \right]^2 = -a \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l'^2}$$

Le dénominateur  $\text{ch } ql'$  ne peut pas être mis sous la forme  $(p-\alpha)\xi(p)$ , aussi devons nous appliquer la règle de Lhopital.

$$R(a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$



La dérivée du dénominateur est :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp} (p \operatorname{ch} ql') &= \operatorname{ch} ql' + p \frac{d}{dp} \operatorname{ch} ql' \\ &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l' + p \frac{d}{dp} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l'\end{aligned}$$

$\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l'$  est nul pour les valeurs de  $p$  considérées.

La dérivée du dénominateur se réduit donc à :

$$\begin{aligned}p \frac{d}{dp} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} l' &= p \cdot \frac{1}{2} l' \cdot \sqrt{\frac{a}{p}} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} l' \\ &= -a \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4 l'^2} \cdot \frac{1}{2} l' \cdot \frac{2 l'}{(2n+1) i \pi} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} l' \\ &= \frac{(2n+1) i \pi}{4} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} l'\end{aligned}$$

Comme  $\operatorname{sh} ix = i \sin x$ , nous avons :

$$\sin (2n+1) \pi / 2 = (-1)^n$$

Les résidus pour les valeurs de  $p = -a \left[ \frac{(2n+1) \pi}{2 l'} \right]^2$  sont :

$$R = \frac{e^{-a(2n+1)^2 \pi^2 / 4 l'^2} \cdot \operatorname{ch} (2n+1) i \pi x / 2 l'}{(2n+1) \cdot (-1)^n}$$

En tenant compte de l'identité :

$$\operatorname{ch} (2n+1) i \pi x / 2 l' = \cos (2n+1) \pi x / 2 l'$$

les résidus deviennent :

$$R(p) = \frac{e^{-a(2n+1)^2 \pi^2 / 4l'^2} \cdot \cos(2n+1)\pi x / 2l' \cdot 4 \cdot (-1)^n}{(2n+1)}$$

L'original de la fonction (3) étant égal à la somme des résidus, nous obtenons donc :

$$\frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\theta_{s_1} - \theta_i} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{e^{-a(2n+1)^2 \pi^2 t / 4l'^2} \cdot \cos \frac{(2n+1)x\pi}{2l'}}{2n+1}$$

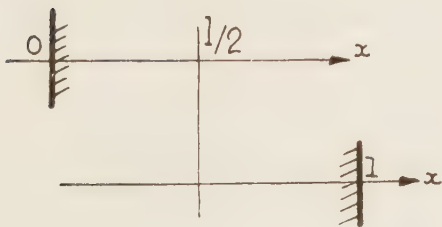
L'organigramme, le programme et les résultats de cette relation se trouvent aux chapitres correspondants.

Les résultats de ce calcul permettent de chiffrer la différence de température du disque à une abscisse  $x$  et à un instant  $t$  en considérant celui-ci comme étant la juxtaposition de deux milieux semi infinis et un milieu limité symétrique.

## B1

Dans cette étude de l'évolution de la température dans le disque pendant les premiers instants du freinage , les hypothèses suivantes sont émises :

- Le disque est symétrique.
- Le modèle thermique résulte de la juxtaposition de deux milieux semi infinis, limités, l'un à  $[0, 1/2]$  , l'autre à  $[1/2, 1]$ .



- La température de surface des plaquettes est constante et égale à  $\theta_{s_1}$
- De plus, le disque est supposé se trouver à la température ambiante avant l'application du coup de frein.

## 1 ETUDE DU PREMIER TOUR

### 1.1 Premier passage devant les garnitures.

- La condition initiale est :

$$\theta(x, 0) = \theta_i$$

- Les conditions aux limites sont :

$$\left. \begin{array}{l} \theta(0, t) = \theta_{s_1} \\ \theta(\infty, t) = \theta_i \end{array} \right\} = \theta(1, t) \text{ par symétrie pour l'autre milieu semi infini.}$$

Ces conditions sont applicables quelquesoit  $t$  positif durant le passage du point considéré du disque devant les garnitures.

L'équation de la diffusion donne :

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} [p \bar{\theta} - \theta_i]$$

$$\underline{\bar{\theta}''_{x^2} - \frac{p}{a} \bar{\theta} = -\frac{1}{a} \theta_i}$$

Cette équation est la même que celle obtenue dans le précédent calcul. La résolution sera identique, et nous obtenons ainsi :

$$\bar{\theta}(x, p) = A(p) \cdot e^{qx} + B(p) \cdot e^{-qx} + \theta_i/p$$

en posant  $p a = q^2$

La condition à la limite  $\overline{\Theta}(\infty, p) = \Theta_i/p$  implique que  $A(p) = 0$ , en effet  $\Theta(x, p)$  doit avoir cette limite finie quand  $x$  tend vers l'infini donc que le coefficient de  $e^{qx}$  doit être nul.

La condition à la limite  $\overline{\Theta}(0, p)$  permet de déterminer  $B(p)$  soit :

$$\overline{\Theta}(0, p) = \Theta_s/p = B(p) + \Theta_i/p$$

$$\text{d'où } B(p) = \frac{\Theta_s - \Theta_i}{p}$$

La transformée de Laplace de la température au point considéré du disque est :

$$\overline{\Theta}(x, p) = \frac{\Theta_{s1} - \Theta_i}{p} \cdot e^{-qx} + \frac{\Theta_i}{p}$$

Recherchons l'original de cette transformée.

$$\Theta(x, t) = \Theta_i + (\Theta_{s1} - \Theta_i) \left( \frac{e^{-qx}}{p} \right)^{-1}$$

$$= \Theta_i + (\Theta_{s1} - \Theta_i) \left( \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x}}{p} \right)^{-1}$$

L'original de  $\frac{1}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x}$  est  $1 - \Theta(x/2\sqrt{at}) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$

$$= \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{at})$$

L'expression de la fonction d'erreur complémentaire est :

$$\operatorname{erfc}(x/2\sqrt{at}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{at}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\theta(x,t) = \theta_i + (\theta_{s1} - \theta_i) \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-\xi^2} d\xi \right]$$

pour  $0 \leq x \leq 1/2$

Pour avoir l'évolution de la température entre  $1/2$  et  $1$ , nous effectuons un changement de base :

$$\begin{cases} X = 1 - x \\ Y = y \end{cases} \quad 0 \leq X \leq 1/2$$

L'évolution de la température dans le disque lors du premier passage d'un point particulier devant les garnitures est :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1/2 & \quad \theta(x,t) = \theta_{s1} - (\theta_{s1} - \theta_i) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{at}} e^{-\xi^2} d\xi \\ 1/2 \leq x \leq 1 & \quad \theta(x,t) = \theta_{s1} - (\theta_{s1} - \theta_i) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(1-x)/2\sqrt{at}} e^{-\xi^2} d\xi \end{aligned}$$

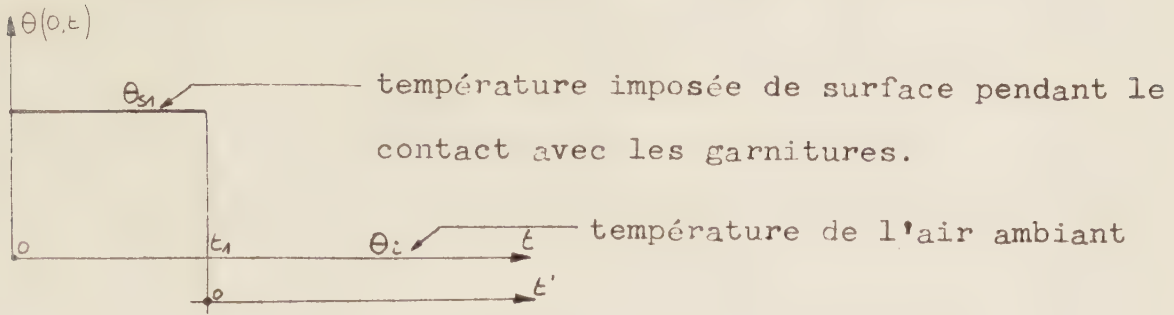
$$0 \leq x \leq 1/2 \quad \theta(x,t) = \theta_{s1} - (\theta_{s1} - \theta_i) \cdot \text{erf } x/2\sqrt{at} = \theta_i + (\theta_{s1} - \theta_i) \text{erfc } \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

L'étude de la fonction  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-u^2} du = \text{erf } \alpha$ , de la fonction  $\text{erfc}(\alpha) = 1 - \text{erf}(\alpha)$ , le développement en série de  $\text{erfc}(\alpha)$ , et son développement asymptotique se trouvent à l'annexe 5

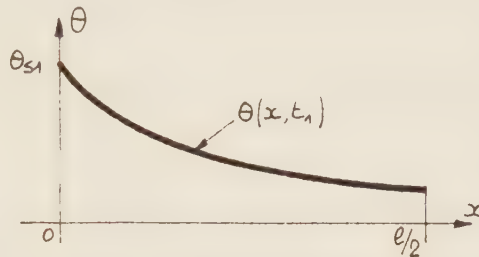
**1.2** Calcul de l'évolution de la température dans le disque à partir de l'instant où le point considéré du disque revient en contact avec l'air .

On considère qu'il y a dans ce cas, échange thermique

par convection entre le disque et le milieu ambiant



La courbe représentant la variation de la température à l'intérieur du disque , en regard du point considéré, à la fin du premier passage devant les garnitures présente l'aspect suivant :



L'expression de l'échange convectif entre la surface du disque et l'air est donnée par la relation :

$$-\lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} = h \left[ \theta_i - \theta(x, t') \right]_{x=0}$$

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{h}{\lambda} \left[ \theta(x, t') - \theta_i \right]_{x=0}$$

La transformée de Laplace de la température est :

$$\bar{\theta}(x, p) = A(p) \cdot e^{qx} + B(p) \cdot e^{-qx} + \frac{\theta(x, t_1)}{p}$$

les conditions aux limites lorsque le point considéré du disque quitte le contact avec les garnitures sont :



$$\bar{\theta}(0, t_1) = \theta_{s1}/p$$

$$\bar{\theta}(\infty, t_1) = \theta_i/p$$

Comme  $\bar{\theta}(x, p)$  a une valeur finie pour  $x$  infini, ceci implique que le coefficient de  $A(p) \cdot e^{qx}$  est nul, soit  $A = 0$

La transformée de Laplace de la température se réduit alors à :

$$\bar{\theta}(x, p) = B(p) \cdot e^{-qx} + \theta(x, t_1)/p$$

En surface, pour  $x = 0$ , la précédente relation devient :

$$\bar{\theta}(0, p) = B(p) + \theta(0, t_1)/p = B(p) + \theta_{s1}/p$$

Cherchons quelle est la dérivée par rapport à  $x$ , pour la valeur  $x = 0$ , de la transformée de Laplace de la température.

$$\left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right)_{x=0} = \left[ -B(p) \cdot q \cdot e^{-qx} + \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_1) \right]_{x=0}$$

$\theta(x, t_1)$  a été déterminée dans le calcul précédent et est égale à :

$$\theta(x, t_1) = \theta_i + (\theta_{s1} - \theta_i) \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{at_1})$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \theta(x, t_1)}{\partial x} \right]_{x=0} &= \left[ (\theta_{s1} - \theta_i) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{at_1}) \right]_{x=0} \\ &= \left[ (\theta_{s1} - \theta_i) \cdot \frac{\partial \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{at_1})}{\partial x/2\sqrt{at_1}} \cdot \frac{\partial x/2\sqrt{at_1}}{\partial x} \right]_{x=0} \\ &= (\theta_{s1} - \theta_i) \cdot (-1)/2\sqrt{at_1} \end{aligned}$$

En effet, la tangente à l'origine de  $y = \operatorname{erfc}(x)$  est égale à :

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0} = (-1)$$

Finalement, la dérivée de la transformée de Laplace de la température est :

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0} = -B(p) \cdot q + \frac{1}{p} (\theta_i - \theta_{s1}) \cdot 1/2 \sqrt{at_1}$$

Nous pouvons ainsi déterminer  $B(p)$ , soit :

$$\begin{aligned} B(p) \cdot q + \frac{1}{p} (\theta_{s1} - \theta_i) \cdot 1/2 \sqrt{at_1} &= \frac{h}{\lambda} \cdot \left[ \frac{\theta_i}{p} - \bar{\theta}(x, p) \right]_{x=0} \\ &= \frac{h}{\lambda} \cdot \left[ \frac{\theta_i - \theta_{s1}}{p} - B(p) \right] \end{aligned}$$

$$\text{car } \bar{\theta}(0, p) = B(p) + \theta_{s1}/p$$

$$B(p) \cdot q + \frac{h}{\lambda} \cdot B(p) = \frac{h}{\lambda} \cdot \left[ \frac{\theta_i - \theta_{s1}}{p} \right] + \frac{1}{p} (\theta_i - \theta_{s1}) \cdot 1/2 \sqrt{at_1}$$

$$B(p) = \frac{1}{q + h/\lambda} \cdot (\theta_i - \theta_{s1}) \cdot \frac{1}{p} \cdot \left[ \frac{h}{\lambda} + 1/2 \sqrt{at_1} \right]$$

Nous pouvons vérifier l'homogénéité du terme :

$h/\lambda + 1/2 \sqrt{at_1}$  ; en effet ,ses dimensions sont :

$$\frac{W}{L^2 \cdot ^\circ K} \cdot \frac{L \cdot ^\circ K}{W} + \frac{1}{[L^2 \cdot T^{-1} \cdot T]}^{1/2} = L^{-1}$$

La transformée de Laplace de la température durant cette période où le point considéré du disque n'est plus en

contact avec les garnitures est :

$$\Theta(x, p) = (\theta_i - \theta_{s1}) \left[ \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{a}t_1} \right] \cdot \frac{e^{-qx}}{p(q + \frac{h}{\lambda})} + \frac{\Theta(x, t_1)}{p}$$

Recherchons quel est l'original de cette fonction.

Cet original figure dans les tables des transformées de Laplace du livre de Ms Carslaw et Jaeger : "Conduction of heat in solids".

$$\Theta(x, t') = \Theta(x, t_1) + \left[ \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{a}t_1} \right] (\theta_i - \theta_{s1}) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\lambda}{h} \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a}t'} - \frac{\lambda}{h} \cdot e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}at'} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a}t'} + \frac{h}{\lambda}\sqrt{a}t' \right) \right\}$$

$$\Theta(x, t) = \Theta(x, t_1) + \left[ 1 + \frac{\lambda}{2h\sqrt{a}t_1} \right] (\theta_i - \theta_{s1}) \cdot \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a}(t-t_1)} - \right.$$

$$\left. - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}a(t-t_1)} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a}(t-t_1)} + \frac{h}{\lambda}\sqrt{a(t-t_1)} \right) \right\}$$

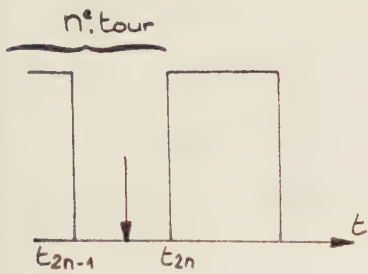
Nous avons précédemment calculé  $\Theta(x, t_1)$  :

$$\Theta(x, t_1) = \theta_i + (\theta_{s1} - \theta_i) \cdot \operatorname{erfc} x/2\sqrt{a}t_1$$

Nous pouvons, par cette méthode calculer l'évolution de la température au point considéré du disque pendant les premiers tours.

Ces calculs se trouvent à l'annexe 6.

### 1.3 RESULTATS DE CETTE METHODE DE CALCUL APPLIQUEE A LA DETERMINATION DE LA TEMPERATURE DANS LES PREMIERS INSTANTS DU FREINAGE. $\theta_{s1} = \text{Cste.}$

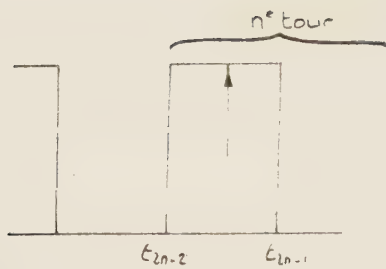


- Quand le point considéré du disque est en contact avec l'air lors du n<sup>e</sup> tour après le début du freinage, nous avons la valeur de la température suivante :

$$\theta(x, t) = \left\{ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} \right\} \cdot \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}a(t-t_{2n-1})} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} + \frac{h}{\lambda}\sqrt{a(t-t_{2n-1})} \right) \right\} + \theta(x, t_{2n-1})$$

soit, explicitée de façon globale :

$$\begin{aligned} \theta(x, t) = & \left[ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} \right] \cdot \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}a(t-t_{2n-1})} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} + \frac{h}{\lambda}\sqrt{a(t-t_{2n-1})} \right) \right\} + \\ & + \sum_0^n \left[ (\theta_{s1} - \theta_i) \frac{h}{\lambda} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \right] \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2}a(t_{2n-2}-t_{2n-3})} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{h}{\lambda}\sqrt{a(t_{2n-2}-t_{2n-3})} \right) \right\} \times \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t_{2n-1}-t_{2n-2})}} \right\} + \\ & + \sum_0^n \left[ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \right] \cdot \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t_{2n-2}-t_{2n-3})}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}a(t_{2n-2}-t_{2n-3})} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t_{2n-2}-t_{2n-3})}} + \frac{h}{\lambda}\sqrt{a(t_{2n-2}-t_{2n-3})} \right) \right\} \end{aligned}$$



- Quand le point du disque revient pour la n<sup>e</sup> fois en contact avec les garnitures, nous avons la valeur de la température suivante :

$$\theta(x, t) = \left[ \theta_{s1} - \theta(0, t_{2n-2}) \right] \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t-t_{2n-2})}} + \theta(x, t_{2n-2}) \quad (2)$$

avec

$$\theta(0, t_{2n-2}) = \left[ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \right] \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} \alpha (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right\} + \underbrace{\theta(0, t_{2n-3})}_{\theta_{s1}}$$

soit :

$$\theta(x, t) = \left[ (\theta_{s1} - \theta_i) \frac{h}{\lambda} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \right] \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} \alpha (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right\} \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t-t_{2n-2})}} + \theta(x, t_{2n-2})$$

Les expressions récurrentes des dérivées de la température par rapport à  $x$  sont :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(t_{2n-1}) \right]_{x=0} = \left[ (\theta_{s1} - \theta_i) \frac{h}{\lambda} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \right] \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} \alpha (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right\} \frac{-1}{2\sqrt{\alpha(t_{2n-1} - t_{2n-2})}} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-2}) \right]_{x=0}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-2}) \right]_{x=0} = \left[ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \right] \left\{ \frac{e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_{2n-2} - t_{2n-3})} - 1}{2\sqrt{a(t_{2n-2} - t_{2n-3})}} - \right. \\ \left. - \frac{h}{\lambda} e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_{2n-2} - t_{2n-3})} \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right\} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0}$$

Ce qui nous permet de développer la relation (2) sous la forme suivante :

$$\theta(x, t) = \left[ (\theta_{s1} - \theta_i) \frac{h}{\lambda} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \right] \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_{2n-2} - t_{2n-3})} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right\} \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t - t_{2n-2})}} + \\ + \sum_0^n \left[ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \right] \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t_{2n-2} - t_{2n-3})}} - \right. \\ \left. - e^{\frac{h}{\lambda} x + \frac{h^2}{\lambda^2} a(t_{2n-2} - t_{2n-3})} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t_{2n-2} - t_{2n-3})}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right) \right\} + \\ + \sum_0^n \left[ (\theta_{s1} - \theta_i) \frac{h}{\lambda} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-5}) \right]_{x=0} \right] \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_{2n-4} - t_{2n-5})} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_{2n-4} - t_{2n-5})} \right\} \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t_{2n-3} - t_{2n-4})}}$$

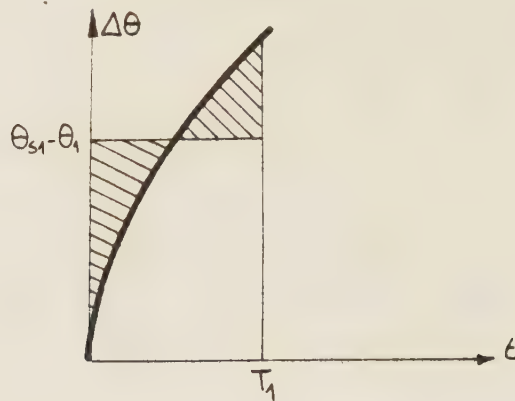
Dans cette première partie, nous avons donc pris des états de température juxtaposables, c'est à dire que nous avons considéré les évolutions de la température dans des milieux semi infinis.

La limite de validité de cette hypothèse se situe au temps  $T_1$ , ce qui signifie qu'à partir de cet instant  $T_1$ , nous



faire les calculs sur le modèle du mur d'épaisseur finie.

#### 1.4 CALCUL DE $\theta_{s1}$



Dans les calculs précédents, nous avons considéré la température de contact disque-garnitures constante et égale à la valeur notée  $\theta_{s1}$ .

La courbe  $\Delta\theta = f(t)$  est la même pour un milieu illimité et un milieu limité dans les premiers instants du freinage c'est à dire durant la période  $[0, T_1]$ , ceci a été justifié précédemment lors de la détermination des températures de surface. La relation donnant  $\Delta\theta$  est :

$$\Delta\theta = \frac{2\sqrt{t} \cdot q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{T} \right)$$

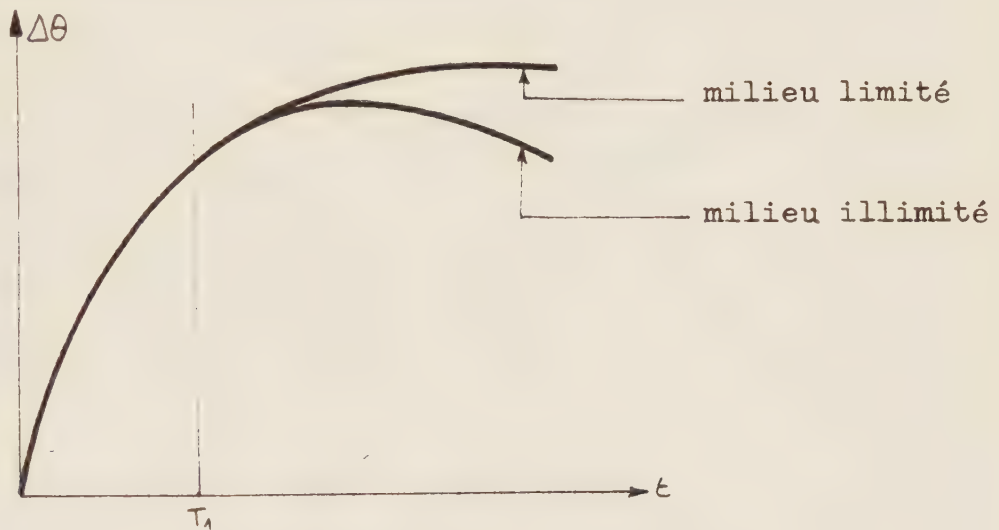
T étant la durée totale du freinage (jusqu'à l'arrêt du véhicule). L'aire contenue sous la courbe  $\Delta\theta = f(t)$  est :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} \frac{2\sqrt{t} \cdot q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \cdot \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right) dt &= (\theta_{s1} - \theta_i) T_1 \\ &= \frac{2 q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \cdot \left[ \frac{2}{3} T_1^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} T_1^{5/2} \right] \end{aligned}$$

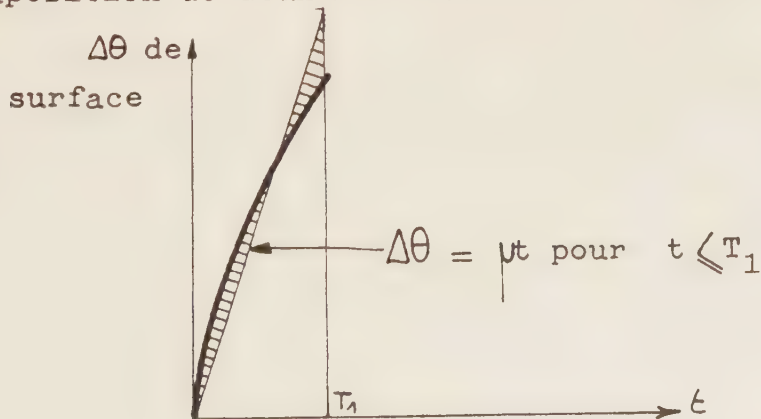
$$= \frac{4 q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda_{DC}}} T_1^{3/2} \left( 1 - \frac{2}{5} T_1 \right)$$

$$\theta_{S1} - \theta_i = \frac{4 q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda_{DC}}} \sqrt{T_1} \left( 1 - \frac{2}{5} T_1 \right)$$

2. Dans la seconde partie de cette étude de la température dans le disque durant les premiers instants du freinage, nous considérerons une programmation de température de surface de contact disque-garnitures qui ne sera plus égale à une constante mais qui sera une fonction linéaire du temps.



Nous considérerons de nouveau dans cette étude que le disque est symétrique et que l'état global résulte de la juxtaposition de deux milieux semi infinis



## 2.1

### EVOLUTION DE LA TEMPERATURE DANS LE DISQUE LORS DU

#### PREMIER PASSAGE DEVANT LES GARNITURES.

Appliquons le théorème de Duhamel :

$$\text{posons : } \theta_x^{t*} = \theta_x^t - \theta_i$$

$$\theta_m^{t*} = \int_0^t \phi(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} T(M, t-\lambda) d\lambda$$

$$\text{avec } T(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad \text{et } T(x, t-\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{a(t-\lambda)}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$\phi(\lambda)$  est la fonction de programmation en température de surface,  $T(x, t-\lambda)$  est la "réponse" à une programmation en température "échelon" de la surface.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t-\lambda)}{\partial t} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ e^{-x^2/4a(t-\lambda)} \cdot \frac{d}{dt} \frac{x}{2\sqrt{a(t-\lambda)}} \right] \\ &= \frac{x}{2\sqrt{a\pi}(t-\lambda)^{3/2}} \cdot e^{-x^2/4a(t-\lambda)} \end{aligned}$$

$$\text{soit } \theta_x^{t*} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu \lambda \left[ \frac{x}{4\sqrt{a}(t-\lambda)^{3/2}} \cdot e^{-x^2/4a(t-\lambda)} \right] d\lambda$$

$$\text{posons : } u = \frac{x}{2\sqrt{a(t-\lambda)}} \quad \text{ce qui donne :}$$

$$(t-\lambda) = \frac{x^2}{4u^2a}$$

Après cette transformation, la forme générale du théorème de Duhamel est :

$$\begin{aligned}\theta_x^{t*} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} \phi\left(t - \frac{x^2}{4u^2a}\right) \cdot e^{-u^2} du \\ &= \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} \left(t - \frac{x^2}{4u^2a}\right) \cdot e^{-u^2} du\end{aligned}$$

Décomposons cette intégrale :

soit :  $\theta_1 = \frac{2\mu t}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} e^{-u^2} du = \mu t \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}$

et  $-\theta_2 = \frac{2\mu x^2}{4a\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2} d\xi$

Déterminons la valeur de l'intégrale  $\theta_2$  :

posons :  $e^{-\xi^2} = u$  ce qui donne  $du = -2\xi e^{-\xi^2}$

et  $\frac{d\xi}{\xi^2} = dv$  soit :  $v = -\frac{1}{\xi}$

$$-\theta_2 = \frac{\mu x^2}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \left[ -\frac{1}{\xi} e^{-\xi^2} \right]_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} - 2 \int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right\}$$

$$-\theta_2 = \frac{\mu x^2}{2a\sqrt{\pi}} \left[ \left( \frac{2\sqrt{at}}{x} e^{-x^2/4at} \right) - \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right]$$

$$\theta(x,t)^* = \theta_1 + \theta_2 =$$

$$= \mu t . \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{\mu x^2}{2a\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{\pi} . \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} - \frac{2\sqrt{at}}{x} . e^{-x^2/4at} \right)$$

$$\boxed{\theta(x,t) = \mu t \left[ \left( 1 + \frac{x^2}{2at} \right) . \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} - x . \frac{e^{-x^2/4at}}{\sqrt{\pi at}} \right] + \theta_i}$$

Cette équation permet de retrouver une valeur de la température de surface proche de la valeur réelle de cette température car l'assimilation de la loi de température de surface à une loi linéaire est une hypothèse justifiée dans les premiers instants du freinage.

A la fin du passage devant les garnitures du point considéré, la répartition de la température est :

$$\theta(x,t_1) = \mu t_1 \left[ \left( 1 + \frac{x^2}{2at_1} \right) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at_1}} - x \frac{e^{-x^2/4at_1}}{\sqrt{\pi at_1}} \right] + \theta_i$$

## 2.2 EVOLUTION DE LA TEMPERATURE LORSQUE LE POINT CONSIDERE REVIENT AU CONTACT DE L'AIR ( pour la première fois depuis le début du freinage.)

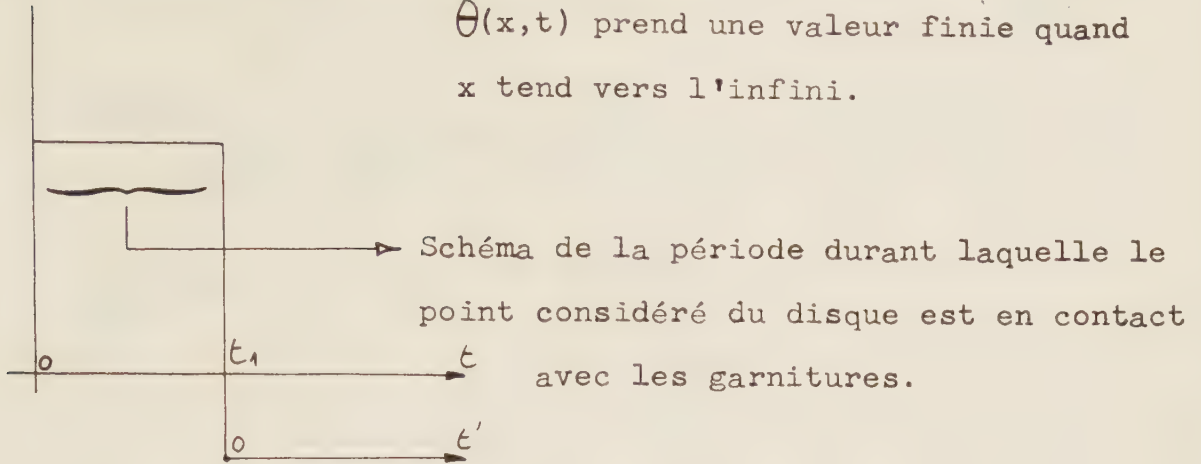
L'équation de la diffusion permet d'écrire :

$$\bar{\theta}(x,p) = A(p) . e^{qx} + B(p) . e^{-qx} + \theta(x,t_1)/p$$

Les conditions aux limites, quand le point considéré du disque quitte le contact avec les garnitures sont :

$$\theta(0,t_1) = \theta_i + \mu t_1$$

$\theta(\infty, t_1) = \theta_i$  ce qui implique que  $A(p) = 0$  puisque  $\theta(x, t)$  prend une valeur finie quand  $x$  tend vers l'infini.



La transformée de Laplace de la température en ce point est :

$$\bar{\theta}(x, p) = B(p) \cdot e^{-qx} + \theta(x, t_1)/p$$

Pour  $x = 0$ , cette relation devient :

$$\bar{\theta}(0, p) = B(p) + \theta(0, t_1)/p = B(p) + \frac{\theta_i + \mu t_1}{p}$$

La condition d'échange par convection entre le disque et le milieu ambiant s'écrit :

$$-\lambda \left[ \frac{\partial \bar{\theta}(x, p)}{\partial x} \right]_{x=0} = h \left[ \frac{\theta_i}{p} - \bar{\theta}(x, p) \right]_{x=0}$$

Cette relation va permettre de déterminer  $B(p)$ .

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \bar{\theta}(x, p)}{\partial x} \right]_{x=0} &= \left[ -B(p) \cdot q \cdot e^{-qx} + \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \theta(x, t_1)}{\partial x} \right]_{x=0} \\ &= -B(p) \cdot q + \frac{1}{p} \cdot \left[ \frac{\partial \theta(x, t_1)}{\partial x} \right]_{x=0} \end{aligned}$$



La dérivée de  $\theta(x, t_1)$  par rapport à  $x$  pour la valeur  $x = 0$  est égale à :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \theta(x, t_1)}{\partial x} \right]_{x=0} &= \mu t_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + \frac{x^2}{2at_1} \right) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at_1}} - \frac{x \cdot e^{-x^2/4at_1}}{\sqrt{\pi at_1}} \right]_{x=0} \\ &= \mu t_1 \left[ \left( 1 + \frac{x^2}{2at_1} \right) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{at_1}} + \frac{2x}{2at_1} \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at_1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-x^2/4at_1}}{\sqrt{\pi at_1}} + 2x \cdot \frac{e^{-x^2/4at_1}}{\sqrt{\pi at_1}} \right]_{x=0} \\ \left[ \frac{\partial \theta(x, t_1)}{\partial x} \right]_{x=0} &= \mu t_1 \left[ \frac{-1}{2\sqrt{at_1}} - \frac{1}{\sqrt{\pi at_1}} \right] = -\mu t_1 \left[ \frac{2+\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi at_1}} \right] \end{aligned}$$

En reportant ce résultat dans l'équation d'échange, nous obtenons :

$$-B(p) \cdot q + \frac{\mu t_1}{p} \left[ \frac{-(2+\sqrt{\pi})}{2\sqrt{\pi at_1}} \right] = -\frac{h}{\lambda} \left[ \frac{\theta_i}{p} - \overline{\theta}(x, p) \right]_{x=0}$$

$$\begin{aligned} B(p) \cdot q + \frac{\mu t_1}{p} \left( \frac{2+\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi at_1}} \right) &= \frac{h}{\lambda} \left[ \frac{\theta_i - \theta(0, t_1)}{p} - B(p) \right] \\ &= -\frac{h}{\lambda} \left[ B(p) + \frac{\mu t_1}{p} \right] \end{aligned}$$

$$B(p) \cdot \left( q + \frac{h}{\lambda} \right) = \frac{\mu t_1}{p} \left[ -\frac{h}{\lambda} - \frac{2+\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi at_1}} \right]$$

$$B(p) = \frac{\mu t_1 \left[ -\frac{h}{\lambda} - \frac{2+\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi at_1}} \right]}{p \left( q + \frac{h}{\lambda} \right)}$$

La transformée de Laplace de la température quand le point considéré du disque est en contact avec l'air est :

$$\bar{\theta}(x,p) = \frac{\mu t_1 \cdot e^{-qx}}{p(q + \frac{h}{\lambda})} \left[ -\frac{h}{\lambda} - \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}at_1} \right] + \frac{\theta(x,t_1)}{p}$$

L'original de la fonction  $\bar{\theta}(x,p)$  est :

$$\theta(x,t) = \theta(x,t_1) + \mu t_1 \left[ -\frac{h}{\lambda} - \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}at_1} \right] \left[ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_1)}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}a(t-t_1)} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_1)}} + \frac{h}{\lambda}\sqrt{a(t-t_1)} \right) \right]$$

Ces formules, explicitées sous cette forme, permettent de déterminer l'évolution de la température au point considéré du disque, pendant la période où ce point est en contact avec l'air, à partir de la température en ce point quand il perdit le contact avec les garnitures, de même pendant la période où ce point est en contact avec les garnitures, à partir de la température atteinte en fin de passage dans l'air.

Cette méthode permet de calculer  $\theta(x,t)$  pendant les premiers tours. (premiers instants du freinage)

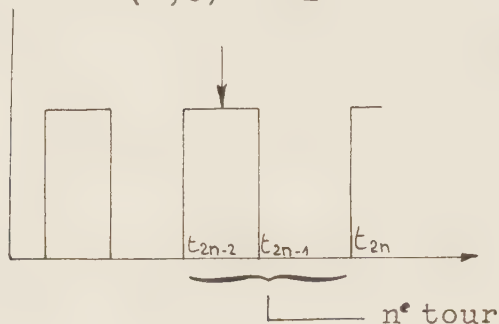
Ces calculs se trouvent à l'annexe 7

## 2.3 EVOLUTION DE LA TEMPERATURE LORS DU N<sup>e</sup> CONTACT DU POINT DU DISQUE AVEC LES GARNITURES.

Les conditions aux limites sont données par les

relations :

$$\begin{cases} \theta(0, t) = \theta_{s1} = \theta_i + \mu t \\ \theta(\infty, t) = \theta_i \end{cases}$$



posons :  $\theta^*(x, t) = \theta(x, t) - \theta(x, t_{2n-2})$

Nous obtenons en effectuant les mêmes calculs que précédemment :

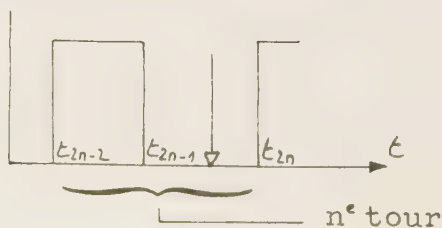
$$\begin{aligned} \theta(x, t) = \mu(t - t_{2n-2}) \cdot \left[ \left( 1 + \frac{x^2}{2a(t - t_{2n-2})} \right) \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t - t_{2n-2})}} - \right. \\ \left. - x \frac{e^{-x^2/4a(t - t_{2n-2})}}{\sqrt{a\pi(t - t_{2n-2})}} \right] + \theta(x, t_{2n-2}) \end{aligned}$$

La dérivée de  $\theta(x, t)$  par rapport à  $x$ , lorsque le point arrive en fin de passage devant les garnitures est donnée par :

$$\left[ \frac{\partial \theta(x, t_{2n-1})}{\partial x} \right]_{x=0} = \mu(t_{2n-1} - t_{2n-2}) \left[ -\frac{2 + \sqrt{\pi}}{2\sqrt{a\pi(t_{2n-1} - t_{2n-2})}} \right] + \left[ \frac{\partial \theta(x, t_{2n-2})}{\partial x} \right]_{x=0}$$

## 2.4

EVOLUTION DE LA TEMPERATURE DANS LE DISQUE LORS DU N<sup>e</sup> CONTACT DU POINT AVEC L' AIR.



Les conditions aux limites à l'instant où le point du disque quitte les garnitures sont :

$$\begin{cases} \theta(0, t_{2n-1}) = \theta_i + \mu t_{2n-1} \\ \theta(\infty, t_{2n-1}) = \theta_i \end{cases}$$

Comme précédemment, l'équation de la diffusion permet d'écrire :

$$\bar{\theta}(x, p) = A(p) \cdot e^{qx} + B(p) \cdot e^{-qx} + \theta(x, t_{2n-1})/p$$

Le coefficient de  $e^{qx}$  est nul car  $\bar{\theta}(x, p)$  prend une valeur finie quand  $x$  tend vers l'infini. La solution de l'équation de la diffusion se réduit donc à :

$$\bar{\theta}(x, p) = B(p) \cdot e^{-qx} + \theta(x, t_{2n-1})/p$$

Cette relation devient pour  $x = 0$  :

$$\bar{\theta}(0, p) = B(p) + \frac{\theta_i + \mu t_{2n-1}}{p}$$

La condition d'échange par convection entre le disque et le milieu ambiant s'écrit :

$$-\lambda \left[ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right]_{x=0} = h \left[ \frac{\theta_i}{p} - \bar{\theta}(x, p) \right]_{x=0} = h \left[ \frac{\theta_i}{p} - B(p) - \frac{\theta_i + \mu t_{2n-1}}{p} \right]$$

Cette équation va permettre de déterminer  $B(p)$ .

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \bar{\theta}(x, p)}{\partial x} \right]_{x=0} &= \frac{h}{\lambda} \left[ B(p) + \frac{\mu t_{2n-1}}{p} \right] \\ &= -B(p) \cdot q + \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -B(p) \cdot q + \frac{1}{p} \left\{ \mu (t_{2n-1} - t_{2n-2}) - \left[ \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha\pi} (t_{2n-1} - t_{2n-2})} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-2}) \right]_{x=0} \right\} \\
&- B(p) \cdot q + \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} = \frac{h}{\lambda} \left[ B(p) + \mu \frac{t_{2n-1}}{p} \right] \\
&B(p) \cdot \left( q + \frac{h}{\lambda} \right) = \frac{1}{p} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} - \frac{h}{\lambda} \mu t_{2n-1} \right\}
\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement comme transformée de Laplace de la température :

$$\theta(x, p) = \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} - \mu \frac{h}{\lambda} t_{2n-1}}{p \left( q + \frac{h}{\lambda} \right)} \cdot e^{-qx} + \frac{\theta(x, t_{2n-1})}{p}$$

L'original de cette fonction est :

$$\begin{aligned}
\theta(x, t) = & \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} - \frac{h}{\lambda} \mu t_{2n-1} \right\} \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t-t_{2n-1})}} \right. \\
& \left. - e^{\frac{h}{\lambda} x + \frac{h^2}{\lambda^2} \alpha (t-t_{2n-1})} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t-t_{2n-1})}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(t-t_{2n-1})} \right) \right\} + \theta(x, t_{2n-1})
\end{aligned}$$

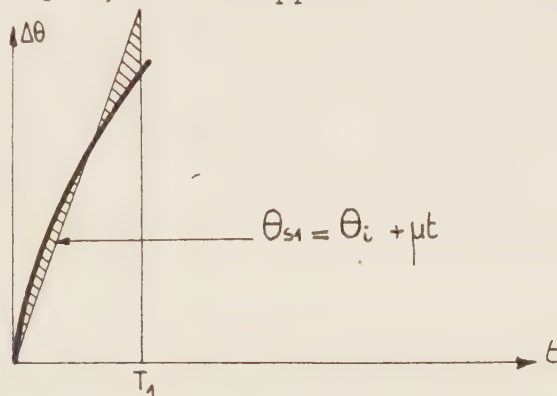
avec :

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} &= \mu (t_{2n-1} - t_{2n-2}) - \left[ \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha\pi} (t_{2n-1} - t_{2n-2})} \right] + \\
&+ \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} - \frac{h}{\lambda} \mu t_{2n-3} \right\} \left[ \frac{e^{\frac{h^2}{\lambda^2} \alpha (t_{2n-2} - t_{2n-3})} - 1}{2\sqrt{\alpha(t_{2n-2} - t_{2n-3})}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h}{\lambda} e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \Big] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} = \mu \sum_0^n \left\{ (t_{2n-1} - t_{2n-2}) - \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{a n (t_{2n-1} - t_{2n-2})}} \right\} + \\
& + \sum_0^n \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} - \frac{h}{\lambda} t_{2n-2} \right\} \times \\
& \times \left[ \frac{e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a (t_{2n-2} - t_{2n-3})}}{2 \sqrt{a (t_{2n-2} - t_{2n-3})}} - \frac{h}{\lambda} \cdot e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right]
\end{aligned}$$

## 2.5

Il faut calculer la valeur de  $\mu$ , c'est à dire la pente de la droite se rapprochant le plus de la courbe réelle de la température de surface durant la période  $0, T_1$ . Comme lors du calcul de  $\theta_{s1}$ , nous supposerons connu  $T_1$ .



Dans la période considérée, c'est à dire pour  $t$  compris entre  $0$  et  $T_1$  (premiers instants du freinage), on considère que la courbe de température de surface en milieu limité est la même que celle en milieu illimité. Cette hypothèse est justifiée dans le chapitre relatif à la détermination de la température de surface en milieu limité.

Celle -ci est donnée par la formule :



$$\Delta\theta = \theta(0,t) - \theta_i = \frac{2\sqrt{t} \cdot q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right)$$

T étant la durée totale du freinage.

Nous devons avoir :

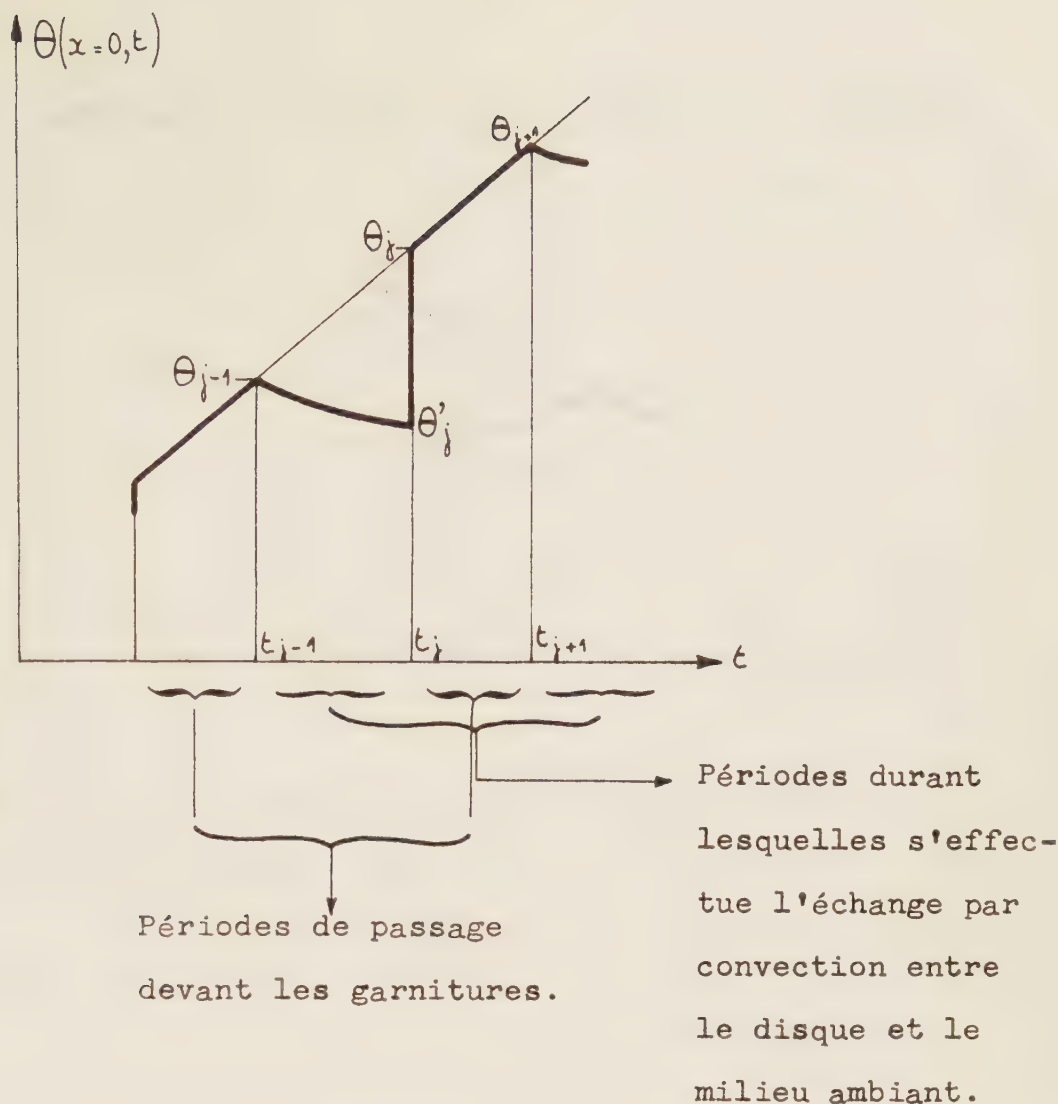
$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} \Delta\theta dt &= \int_0^{T_1} \mu t dt \\ \int_0^{T_1} \frac{2\sqrt{t} \cdot q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right) dt &= \frac{2q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left[ \frac{2}{3} T_1^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{T_1^{5/2}}{T} \right] \\ &= \frac{4}{3} \frac{q_0 T_1^{3/2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2}{5} \frac{T_1}{T} \right) = \mu \frac{T_1^2}{2} \end{aligned}$$

ce qui donne comme valeur de  $\mu$  :

$$\mu = \frac{8q_0}{3\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_1}} \left( 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{T_1}{T} \right)$$

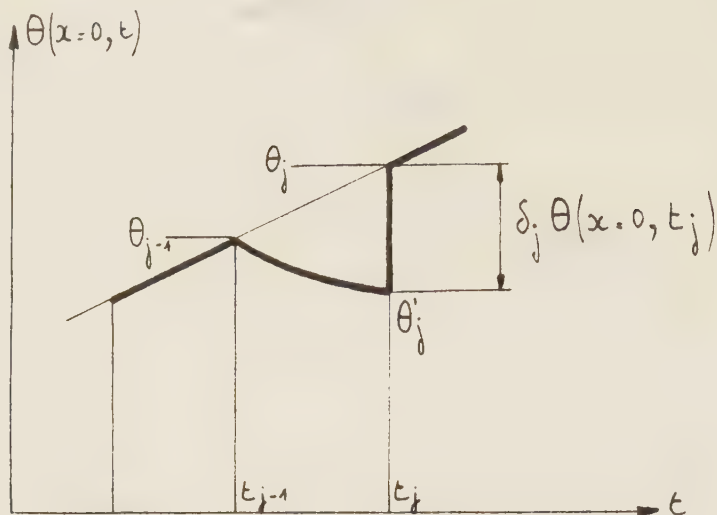
## 2.6

Dans le cas où la programmation en température de surface est une fonction linéaire croissante du temps (fonction la plus proche du phénomène réel), nous avons une évolution de la température de surface du disque en un point qui présente l'aspect suivant :

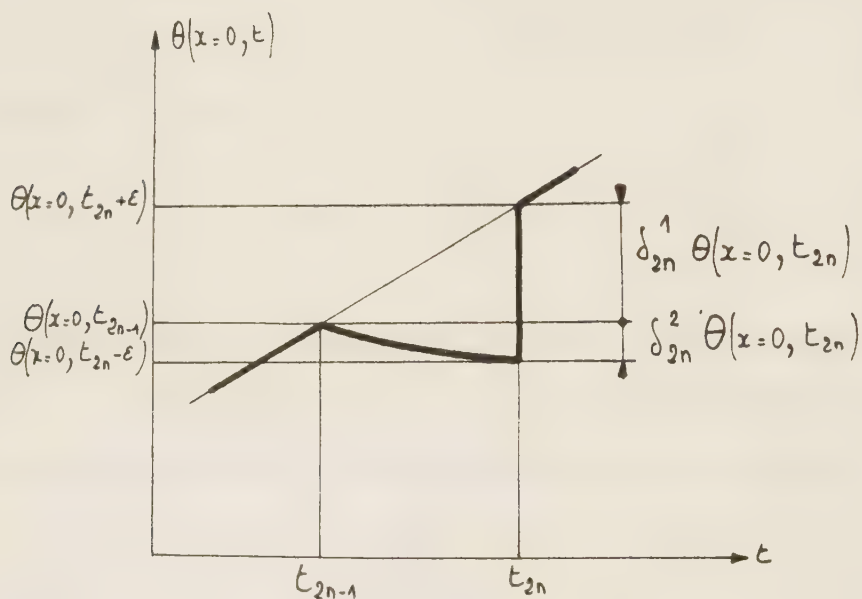


Quand le point considéré du disque quitte les garnitures, il est à la température  $\Theta_{j-1}$ , lors de son passage dans l'air, cette température s'abaisse jusqu'à  $\Theta'_j$  en suivant une loi établie précédemment (loi de type exponentielle), puis en reprenant le contact avec les garnitures, la température du point s'élève brutalement de  $\Theta'_j$  à  $\Theta_j$ ,  $\Theta_j$  étant supérieure à  $\Theta'_j$  (nous supposons, et cette hypothèse est vérifiée, que la température de surface peut subir un saut en contact avec un corps de température différente) car durant la période où le point considéré du disque passait dans l'air, la température de surface des garnitures s'est élevée et ceci, comme nous l'avons

considéré, de façon linéaire en fonction du temps.



Cette montée brutale de température peut être la source des contraintes thermiques causant des criques de surface aussi faut-il évaluer ce  $\delta_j \theta(x=0, t_j) = \theta'_j - \theta_j$



$$\delta_{2n} \theta(0, t_{2n}) = \delta_{2n}^1 \theta(0, t_{2n}) + \delta_{2n}^2 \theta(0, t_{2n})$$

En reprenant l'hypothèse selon laquelle la montée en température de la surface de contact disque-garnitures suit une loi linéaire nous avons :

$$\theta(x=0, t = t_{2n-1}) = \theta_i + \mu t_{2n-1}$$

$$\theta(x=0, t = t_{2n} + \epsilon) = \theta_i + \mu t_{2n}$$

L'écart de température du point du disque entre l'instant où il a quitté les garnitures et l'instant où il reprend le contact avec celles-ci est :

$$\delta_{2n} \theta(x=0, t_{2n}) = \mu(t_{2n} - t_{2n-1})$$

Calcul de la baisse de température causée par l'échange convectif:  $\delta_{2n}^2 \theta(x=0, t_{2n})$ .

$$\delta_{2n}^2 \theta(0, t_{2n}) = \theta(0, t_{2n-1}) - \theta(0, t_{2n} - \epsilon)$$

$$\theta(0, t_{2n-1}) = \theta_i + \mu t_{2n-1}$$

La baisse de température dans le disque due à l'échange par convection est donnée par la relation :

$$\theta(x, t_{2n-1}) - \theta(x, t_{2n} - \epsilon) = \left\{ \frac{h}{\lambda} \cdot \mu t_{2n-1} - \left[ \frac{\partial \theta(x, t_{2n-1})}{\partial x} \right]_{x=0} \right\} x$$

$$x \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t_{2n} - t_{2n-1})}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}\alpha(t_{2n} - t_{2n-1})} \right\} x$$

$$x \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t_{2n}-t_{2n-1})}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(t_{2n}-t_{2n-1})} \right) \Bigg\}$$

Cette relation devient pour  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} \delta_{2n}^2 \theta(x=0, t_{2n}) &= \left\{ \frac{h}{\lambda} \mu t_{2n-1} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} \right\} x \\ &\times \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} \alpha(t_{2n}-t_{2n-1})} x \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(t_{2n}-t_{2n-1})} \right\} \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement comme valeur de l'écart de température de surface entre l'instant où le point du disque quitte le contact avec l'air et l'instant où il revient en contact avec les garnitures ( instants infiniment voisins ) :

$$\begin{aligned} \delta_{2n} \theta(0, t_{2n}) &= \mu (t_{2n} - t_{2n-1}) + \left\{ \frac{h}{\lambda} \mu t_{2n-1} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} \right\} \\ &\times \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} \alpha(t_{2n}-t_{2n-1})} x \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(t_{2n}-t_{2n-1})} \right\} \end{aligned}$$

Il faut remarquer que le fait de prendre :

$$\theta_{s1} - \theta_i = \mu t$$

est une approximation simplificatrice, toutefois pour une détermination plus précise de  $\delta_{2n} \theta(x=0, t_{2n})$ , nous pouvons prendre l'expression réelle explicitée dans le chapitre relatif à la température de surface.

Nous avons alors la relation suivante :

$$\delta_{2n}^1 \theta(0, t_{2n}) = \frac{2q_0}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\lambda \rho c}} \cdot \left[ \sqrt{t_{2n}} \left( 1 - \frac{2t_{2n}}{3T} \right) - \sqrt{t_{2n-1}} \left( 1 - \frac{2t_{2n-1}}{3T} \right) \right]$$

L'expression :  $\Delta\theta_s = \frac{2q_0 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right)$  étant correcte

dans les premiers instants du freinage lorsqu'il s'agit d'un milieu limité.

Nous rappelons que  $\Delta\theta_s = \mu t$  est la valeur moyenne de  $\Delta\theta_s = \frac{2q_0 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right)$  sur la période  $t \in [0, T_1]$

Nous obtenons finalement comme valeur de l'écart de température de surface  $\theta(0, t_{2n} + \varepsilon) - \theta(0, t_{2n} - \varepsilon)$  :

$$\delta_{2n}^2 \theta(0, t_{2n}) = \frac{2q_0}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\lambda \rho c}} \left[ \sqrt{t_{2n}} \left( 1 - \frac{2t_{2n}}{3T} \right) - \sqrt{t_{2n-1}} \left( 1 - \frac{2t_{2n-1}}{3T} \right) \right] +$$

$$+ \left\{ \frac{h}{\lambda} \mu \cdot t_{2n-1} - \left[ \frac{\partial \theta(x, t_{2n-1})}{\partial x} \right]_{x=0} \right\} \left( 1 - e^{-\frac{h^2}{\lambda^2} \alpha (t_{2n} - t_{2n-1})} \operatorname{erfc} \frac{h \sqrt{\alpha (t_{2n} - t_{2n-1})}}{\lambda} \right)$$

Dans  $\delta_{2n}^2 \theta(0, t_{2n})$ , l'hypothèse selon laquelle la montée en température de la surface de contact disque-garnitures suit une loi linéaire ( $\Delta\theta_s = \mu t$ ) est conservée.

En fait, pratiquement  $\delta_{2n}^2 \theta(0, t_{2n})$  est faible vis à vis de  $\delta_{2n}^1 \theta(0, t_{2n})$ , car le coefficient d'échange avec l'air est petit, et la valeur de  $\mu$  très élevée, aussi est-il possible



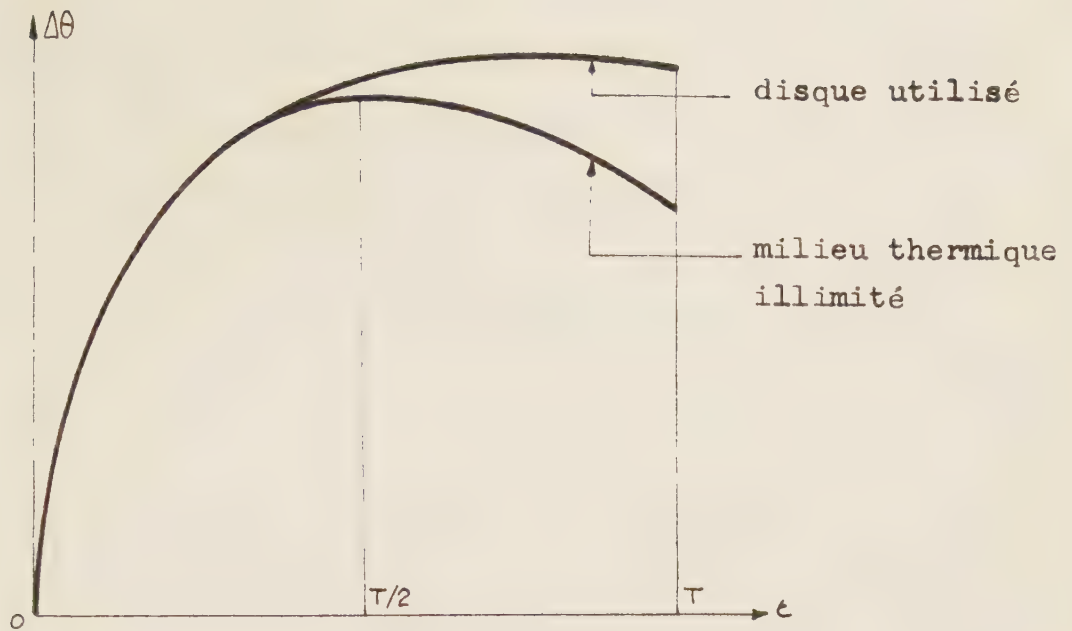
afin d'avoir un ordre de grandeur de  $\delta_{2n} \theta(0, t_{2n})$ , de considérer que  $\delta_{2n} \theta(0, t_{2n})$  est très peu différent de  $\delta_{2n}^1 \theta(0, t_{2n})$ , c'est à dire  $\delta_{2n} \theta(0, t_{2n})$  peu différent de  $\mu(t_{2n} - t_{2n-1})$  ou :

$$\# \frac{2q_0}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\lambda \rho c}} \left[ \sqrt{t_{2n}} \left( 1 - \frac{2t_{2n}}{3T} \right) - \sqrt{t_{2n-1}} \left( 1 - \frac{2t_{2n-1}}{3T} \right) \right]$$

L'erreur commise étant une erreur par défaut. Toutefois, pour évaluer l'influence d'une ventilation extérieure du disque ou d'un facteur modifiant le coefficient d'échange avec le milieu ambiant, il est nécessaire de conserver l'expression complète.

Pour savoir quelle est la méthode de calcul, de  $\theta_{s1} = \text{constante}$  ou de  $\theta_{s1} = \text{fonction linéaire croissante du temps}$ , qui permet le mieux d'approcher et de chiffrer les phénomènes réels, nous devons tenir compte des résultats des essais. (voir chapitre correspondant)

Dans la deuxième partie de cette étude, où nous considérons  $\theta(x=0, t) = \theta_{s2} = \text{constante}$ , pour  $t$  appartenant à l'intervalle de temps  $(T; T_1)$ ,  $\delta_{2n} \theta(x=0, t_{2n})$  ne provient que de l'échange avec l'extérieur. Nous ne pouvons pas faire intuitivement des remarques quant à l'importance de cet écart de température de surface durant cette phase de freinage, car vers la fin, les temps de passage dans l'air, donc les durées d'échange convectif, du point considéré du disque sont considérablement plus longs que dans la phase où  $\theta(0, t) = \mu t + \theta_i$ .

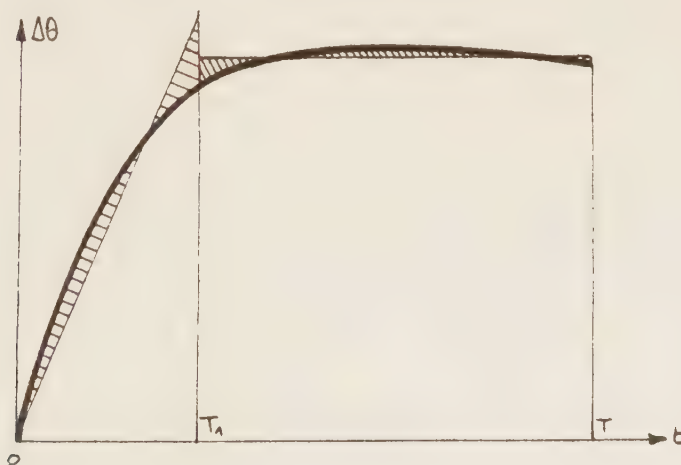


La courbe de la température de surface du disque étudié pour des vitesses du véhicule simulé inférieures à 200 km/h et une épaisseur de disque de 14 mm présente l'aspect ci-dessus.

L'allure de cette courbe justifie les hypothèses suivantes :

$$\Delta\theta_s = \mu t \quad \text{pour } t \text{ compris entre } 0 \text{ et } T_1$$

et  $\Delta\theta_s = \text{constante}$  pour  $t$  compris entre  $T_1$  et  $T$ .

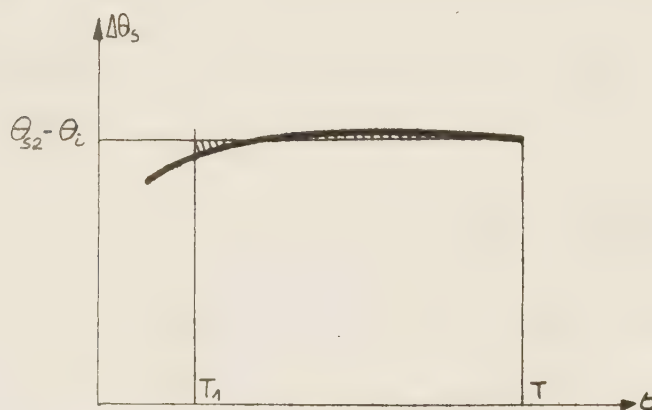


Il conviendra donc de choisir la valeur de  $T_1$  telle que les surfaces hachurées de la figure précédente, soient les plus réduites possible et que cette valeur soit inférieure à la limite de validité de la première méthode de calcul de  $\theta(x,t)$ , méthode utilisant comme modèle thermique deux milieux semi-infinis juxtaposés.

Etudions l'évolution de la température dans le disque en regard du point considéré précédemment défini, pour la période allant de  $t = T_1$ , à la fin du freinage.

## B.2

### ETUDE DE $\theta(x,t)$ POUR $t \in [T_1, T]$

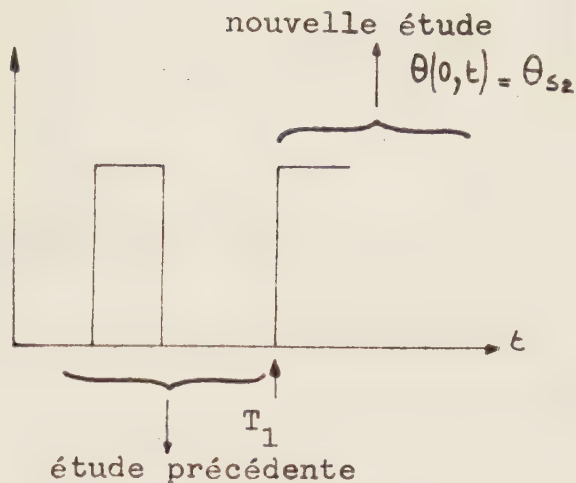


Dans ce domaine, nous devons considérer le modèle du mur d'épaisseur finie  $l$ , tenir compte de la symétrie et prendre une température de surface de contact disque-garnitures constante notée  $\theta_{s2}$ .

Nous imposons une condition supplémentaire sur le choix

de  $T_1$  :

$T_1$  est tel qu'il corresponde à l'instant où le point considéré du disque revient en contact avec les garnitures.



Supposons qu'au temps  $T_1$ , le disque a effectué  $n$  tours

La condition initiale au temps  $t = T_1$  est :

$$\theta(x, T_1) = \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} - \frac{h}{\lambda} \mu t_{2n-1} \right\} x$$

$$\times \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(T_1 - t_{2n-1})}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}\alpha(T_1 - t_{2n-1})} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha(T_1 - t_{2n-1})}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(T_1 - t_{2n-1})} \right) \right\} + \theta(x, t_{2n-1})$$

Ceci est la condition initiale dans le cas où dans la précédente étude, l'hypothèse selon laquelle  $\theta_{s1} = \theta_i + \mu t$  est utilisée. Dans le cas où  $\theta_{s1} = \text{constante}$ , nous aurions alors comme condition initiale :

$$\theta(x, T_1) = \left\{ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} \right\} \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(T_1 - t_{2n-1})}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}\alpha(T_1 - t_{2n-1})} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha(T_1 - t_{2n-1})}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(T_1 - t_{2n-1})} \right) \right\} + \theta(x, t_{2n-1})$$

avec :  $\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0}$  définie précédemment.

1.

# EVOLUTION DE LA TEMPERATURE LORS DU PREMIER PASSAGE

D'UN POINT DU DISQUE DEVANT LES GARNITURES AU DEBUT DE CETTE  
NOUVELLE PERIODE.

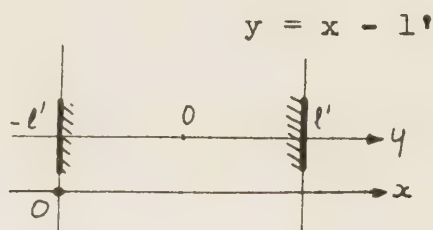
L'équation de la diffusion donne :

$$\frac{\partial \theta(y, t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \theta(y, t)}{\partial y^2}$$

En utilisant la transformée de Laplace de la température, nous obtenons comme dérivée de cette dernière par rapport à  $p$  :

$$\frac{\partial \bar{\theta}(y, p)}{\partial p} = p \cdot \bar{\theta}(y, p) - \bar{\theta}(y, T_1)$$

Nous prendrons dans cette étude l'origine des abscisses au milieu du disque.

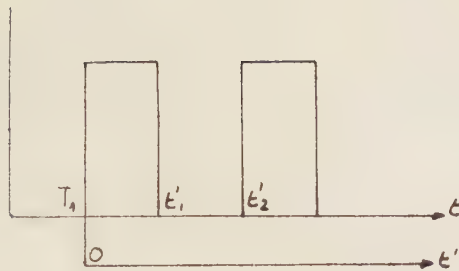


La condition initiale est :

$$\theta(y, 0) = \theta(y, T_1)$$

en  $t'$

$$t' = t - T_1$$



Les conditions aux limites sont :

$$\theta(-l', t') = \theta_{s2} = \text{par symétrie} = \theta(l', t')$$

La condition de flux de chaleur au milieu du disque compte tenu que le gradient de température est nul en cet endroit s'écrit :

$$\left[ \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$$

L'équation de la diffusion conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\overline{\theta''_{y^2}} - \frac{1}{a} p \overline{\theta} = - \frac{1}{a} \theta(y, 0)$$

posons  $p/a = q^2$ , nous obtenons alors la solution de l'équation différentielle précédente (en transformée de Laplace)

$$\overline{\theta}(y, p) = A(p) \cdot e^{qy} + B(p) \cdot e^{-qy} + \theta(y, 0)/p$$

La condition de flux de chaleur nul dans le plan de symétrie à  $y=0$  implique :

$$\left[ \frac{\partial \overline{\theta}(y, p)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 = q \cdot A(p) - q \cdot B(p)$$

ce qui conduit à  $A(p) = B(p)$



La transformée de Laplace de la température est :

$$\overline{\theta}(y,p) = C(p) \cdot \text{ch } qy + \theta(y,0)/p$$

$$\overline{\theta}(y,p) - \theta(y,0)/p = C(p) \cdot \text{ch } qy \quad (1)$$

Les conditions aux limites imposent que :

$$\overline{\theta}(l',p) = \theta_{s2}/p = \theta(y,0)/p + C(p) \cdot \text{ch } ql'$$

soit :

$$\theta_{s2} - \theta(y,0) = p \cdot C(p) \cdot \text{ch } ql' \quad (2)$$

Faisons le rapport, équation (1) / équation (2)

nous obtenons :

$$\frac{\overline{\theta}(y,p) - \theta(y,0)/p}{\theta_{s2} - \theta(y,0)} = \frac{\text{ch } qy}{p \cdot \text{ch } ql'}$$

Recherchons quel est l'original de cette fonction.

L'original de  $\overline{\theta}(y,p) - \theta(y,0)/p$  est  $\theta(y,t') - \theta(y,0)$

$$\frac{\theta(y,t') - \theta(y,0)}{\theta_{s2} - \theta(y,0)} = L^{-1} \frac{\text{ch } qy}{p \cdot \text{ch } ql'} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\text{ch } qy \cdot e^{-pt}}{p \cdot \text{ch } ql'} dp$$

Cette intégrale a été précédemment calculée au début de l'étude thermique (chapitre B), par la méthode des résidus.

Ce calcul nous conduit à la relation suivante :

$$\frac{\theta(y,t) - \theta(y,T_1)}{\theta_{s2} - \theta(y,T_1)} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l'^2} (t-T_1)}}{2n+1} \cdot \cos \frac{(2n+1) \pi y}{2l'}$$

soit  $\theta(y,t') = \left\{ \theta_{s2} - \theta(y,T_1) \right\} \left( 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \right) + \theta(y,T_1)$

## 2

### EVOLUTION DE LA TEMPERATURE LORS DU PREMIER PASSAGE DU POINT DU DISQUE DANS L'AIR APRES $T_1$ .

La relation d'échange par convection entre le disque et le milieu ambiant s'écrit :

$$-\lambda \left[ \frac{\partial \theta(y,t)}{\partial y} \right]_{y=l'} = h \left( -\theta(y,t') + \theta_i \right)_{y=l'}$$

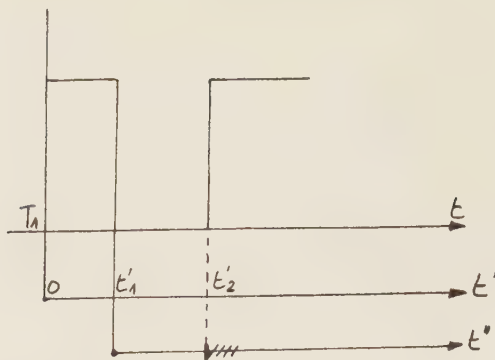
en effet, comme il s'agit d'un flux de chaleur sortant, celui-ci est compté négativement.

$$\lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) < 0 \quad \text{ce qui implique} \quad \lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=-l'} > 0 \quad \text{car la normale } \vec{n} \text{ est orientée vers les } y \text{ négatifs.}$$

$$\text{et } \underbrace{-\lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=-l'}}_{<0} = \overbrace{h \left[ \theta_i - \theta(y,t) \right]_{y=-l'}}^{<0}$$

Les conditions aux limites à l'instant où le point considéré du disque quitte le contact avec les garnitures sont:

$$\theta(-l',t'_1) = \theta(l',t'_1) = \theta_{s2}$$



La condition initiale est donnée par la relation :

$$\theta_{(y,t'_1)} = [\theta_{s2} - \theta_{(y,T_1)}] \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(t'_n) \right\} + \theta_{(y,T_1)}$$

La condition de flux de chaleur nul dans le plan de symétrie implique, comme dans le chapitre précédent, le gradient de température étant nul pour  $y = 0$ , que :

$$\left[ \frac{\partial \theta(y,t)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$$

La solution de l'équation différentielle déduite de l'équation de la diffusion est :

$$\bar{\theta}_{(y,p)} = A(p) \cdot e^{qy} + B(p) \cdot e^{-qy} + \bar{\theta}_{(y,t'_1)}/p$$

$$\bar{\theta}_{(0,p)} = A(p) + B(p) + \bar{\theta}_{(0,t'_1)}/p$$

avec :

$$\theta(0,t'_1) = [\theta_{s2} - \theta(0,T_1)] \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\alpha(2n+1)^2 \pi^2 / 4 x'^2 (t'_1 - T_1)}}{2n+1} \right\} + \theta(0,T_1)$$

où :

$$\theta_{(y=0,T_1)} = \theta_{(x=l',T_1)}$$

La relation donnant la température au milieu du disque, au temps  $T_1$  s'écrit :

$$\theta(x=l', T_1) = \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} - \frac{h}{\lambda} \mu \cdot t_{2n-1} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{erfc} \frac{l'}{2\sqrt{\alpha(T_1 - t_{2n-1})}} - e^{\frac{h}{\lambda} l' + \frac{h^2}{\lambda^2} \alpha (T_1 - t_{2n-1})} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{l'}{2\sqrt{\alpha(T_1 - t_{2n-1})}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(T_1 - t_{2n-1})} \right) \right\} + \theta(x=l', t_{2n-1})$$

La condition de flux de chaleur nul à  $y = 0$  implique :

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \text{ ce qui conduit à } A(p) - B(p) = 0 \text{ soit } A(p) = B(p)$$

La transformée de Laplace de la température s'écrit  
alors :

$$\overline{\theta}(y, p) = C(p) \cdot \operatorname{ch} qy + \theta(y, t'_1) / p$$

La condition d'échange par convection implique que :

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=l'} = \frac{h}{\lambda} [\theta(y, t') - \theta_i]_{y=l'} = - \left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=l'}$$

La calcul de la dérivée par rapport à  $y$  de la température dans le disque au temps  $t = t'_1$  se trouve à l'annexe 8

$C(p)$  peut être déterminé à partir de la relation  
d'échange par convection entre le disque et le milieu ambiant :

$$C(p) \cdot q \cdot \operatorname{sh} ql' + 1/p \left[ \frac{\partial \theta(y, t'_1)}{\partial y} \right]_{y=l'} = \frac{h}{\lambda} \left[ \frac{\theta_i - \theta_{s2}}{p} - C(p) \operatorname{ch} ql' \right]$$

$$C(p) \cdot q \cdot \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \cdot \operatorname{ch} ql' = \frac{1}{p} \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \theta(y, t_1)}{\partial y} \right]_{y=l'} \right\}$$

soit pour  $C(p)$  :

$$C(p) = \frac{\frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \theta(y, t_1)}{\partial y} \right]_{y=l'}}{p \left( q \cdot \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \cdot \operatorname{ch} ql' \right)}$$

Nous obtenons comme transformée de Laplace de la température :

$$\bar{\theta}(y, p) = \frac{\frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \theta(y, t_1)}{\partial y} \right]_{y=l'}}{p \left( q \cdot \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \cdot \operatorname{ch} ql' \right)} \cdot \operatorname{ch} qy + \frac{\theta(y, t_1)}{p}$$

$$\bar{\theta}(y, p) = A \cdot \frac{\operatorname{ch} qy}{p \left( q \cdot \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} ql' \right)} + \frac{\theta(y, t_1)}{p}$$

Recherchons quel est l'original de cette fonction :

$$\theta(y, t) = \theta(y, t_1) + A \cdot \mathcal{L}^{-1} \frac{\operatorname{ch} qy}{p \left( q \cdot \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} ql' \right)}$$

L'original de  $\frac{\operatorname{ch} qy}{p \left( q \cdot \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} ql' \right)}$  est donné par l'intégrale de Bromwich-Wagner :

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{-pt}}{p} \cdot \frac{\operatorname{ch} qy}{q \cdot \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} ql'} dp = \sum \text{Résidus}$$

Le calcul de cette transformation inverse se trouve à l'annexe 9.

La somme des résidus est égale à :

$$\sum R = \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t''} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'}$$

Nous obtenons comme évolution de la température durant la période où  $t$  est compris entre  $t'_1$  et  $t'_2$  :

$$\theta(y, t') = \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_1) \right]_{y=l'} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{h}{\lambda} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 (t' - t'_1)} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'} \right\} + \theta(y, t'_1)$$

avec  $\alpha_n$  = racine de l'équation  
transcendante :

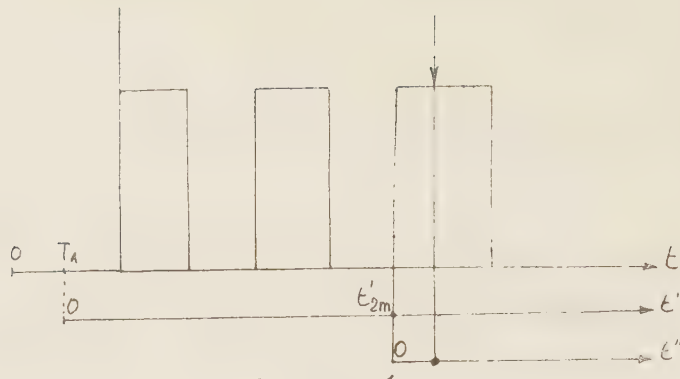
$$\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha l' = \frac{h}{\lambda}$$

Connaissant  $\theta(y, t'_2)$  nous pouvons alors déterminer l'évolution de la température dans le disque lors des prochains passages du point considéré du disque devant les garnitures, ces calculs sont à l'annexe 10.

### 3. EVOLUTION DE LA TEMPERATURE DANS LE DISQUE QUAND LE POINT CONSIDERE VIENDRA POUR LA $m^e$ FOIS APRES LE TEMPS $T_1$ EN CONTACT AVEC LES GARNITURES.

Le changement d'abscisse (sur l'axe des temps) répond au schéma suivant :





$(m + n)^e$  tour

nombre de tours effectués de 0 à  $T_I$

Nous obtenons comme relation donnant  $\theta(y, t')$  :

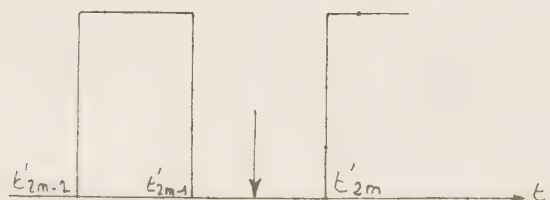
$$\theta(y, t) = \theta(y, t'_{2m}) + \left( \theta_{s2} - \theta(y, t'_{2m}) \right) \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{e^{-\frac{(2i+1)^2 \pi^2 (t' - t'_{2m})}{4l'^2}}}{2l' + 1} \cdot \cos \frac{(2l'+1) \pi y}{2l'} \right\}$$

Nous pouvons calculer  $\theta(y, t')$  lors des prochains passages du point considéré du disque dans l'air. Ces calculs sont à l'annexe 11.

**4.**

EVOLUTION DE LA TEMPERATURE DANS LE DISQUE QUAND LE POINT CONSIDERE REVIENT POUR LA  $m^e$  FOIS APRES  $T_1$  EN CONTACT AVEC L'AIR .



$(m + n)^e$  tour

nombre de tours effectués de 0 à  $T_1$

Les conditions aux limites sont :

$$\theta(y=-1', t'_{2m-1}) = \theta_{s2} = \text{par symétrie} = \theta(y=1', t'_{2m-1})$$

La condition initiale est donnée par la relation :

$$\theta(y, t'_{2m-1}) = \theta(y, t'_{2m-2}) + \left( \theta_{s2} - \theta(y, t'_{2m-2}) \right) \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(t'_{2m-1}) \cdot \cos \frac{(2i+1)\pi y}{2\ell'} \right\}$$

$$\text{avec } \varphi(t'_{2m-1}) = (-1)^i \times \frac{e^{-\alpha(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4\ell'^2} (t'_{2m-1} - t'_{2m-2})}}{2i+1}$$

La condition de flux de chaleur nul dans le plan de symétrie implique que le gradient de température est nul pour  $y = 0$ ; soit :

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$$

ce qui peut être explicité sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ A(p) \cdot e^{qy} + B(p) \cdot e^{-qy} + \theta(y, t'_{2m-1})/p \right]_{y=0} &= \\ &= A(p) - B(p) = 0 \text{ ce qui conduit à } A(p) = B(p) \end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle déduite de l'équation de la diffusion s'écrit alors :

$$\overline{\theta}(y, p) = C(p) \cdot \text{ch } qy + \theta(y, t'_{2m-1})/p$$

La condition d'échange thermique par convection entre le disque et le milieu ambiant permet de déterminer  $C(p)$ .

$$\left[ \frac{\partial \theta(y, p)}{\partial y} \right]_{y=l'} = \frac{h}{\lambda} \left[ \frac{\theta_i}{p} - \bar{\theta}(y, p) \right]_{y=l'}$$

$$C(p) \left( q \cdot \operatorname{sh} q l' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} q l' \right) = \frac{1}{p} \left[ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-1}) \right]_{y=l'}$$

soit pour  $C(p)$  :

$$C(p) = \frac{\frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-1}) \right]_{y=l'}}{p \left( q \cdot \operatorname{sh} q l' + \frac{h}{\lambda} \cdot \operatorname{ch} q l' \right)}$$

La détermination de la valeur de la dérivée par rapport à  $y$  de la température dans le disque, puis sur la surface à l'instant où le disque reprend pour la  $m^e$  fois le contact avec l'air est calculée à l'annexe 12.

Nous obtenons :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-1}) \right]_{y=l'} = (\theta_{s2} - \theta(y, t'_{2m-2})) \left( \frac{2}{l'} \sum_{i=0}^{i=\infty} e^{-a(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_{2m-1} - t'_{2m-2})} \right)$$

Ce qui donne comme transformée de Laplace de la température :

$$\bar{\theta}(y, p) = \frac{\frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-1}) \right]_{y=l'} \cdot \operatorname{ch} q y + \frac{\theta(y, t'_{2m-1})}{p}}{p \left( q \cdot \operatorname{sh} q l' + \frac{h}{\lambda} \cdot \operatorname{ch} q l' \right)}$$

Pour rechercher l'original de cette transformée, nous appliquons la même méthode que précédemment, en utilisant la méthode des résidus pour le calcul de l'intégrale de Bromwich-Wagner. Nous obtenons la relation suivante :

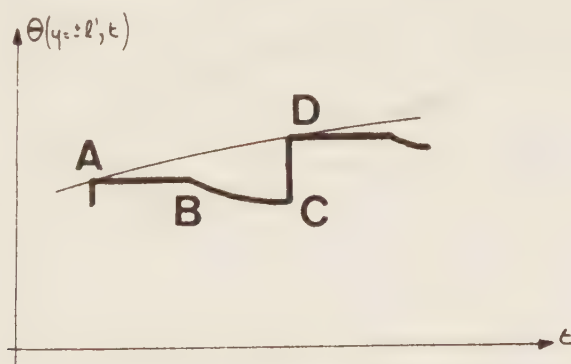
$$\theta(y, t') = \theta(y, t'_{2m-1}) + \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \theta(y, t'_{2m-1})}{\partial y} \right]_{y=l'} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha \alpha_n^2 (t' - t'_{2m-1})} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'} \right\}$$

$\alpha_n$  étant la racine de l'équation transcendante :  $\alpha \operatorname{tg} \alpha l' = \frac{h}{\lambda}$

Dans le cas où l'erreur commise en assimilant la température de surface du disque, durant la période allant de  $t = T_1$  à  $t = T$ , à une constante, devient inacceptable, on peut alors prendre pour le calcul par programme, à chaque instant où le point considéré du disque vient en contact avec les garnitures, la valeur de  $\theta_{s2}$  figurant sur le graphe représentant la température de surface en milieu limité.

Nous aurons alors une évolution de la température de surface présentant l'aspect suivant :



AB : Période durant laquelle le point considéré du disque est en contact avec les garnitures et où la température de surface est considérée comme constante.

BC : Période durant laquelle le point considéré du disque passe dans l'air et où la température de surface subit un abaissement dû à l'échange thermique par convection avec le milieu ambiant.

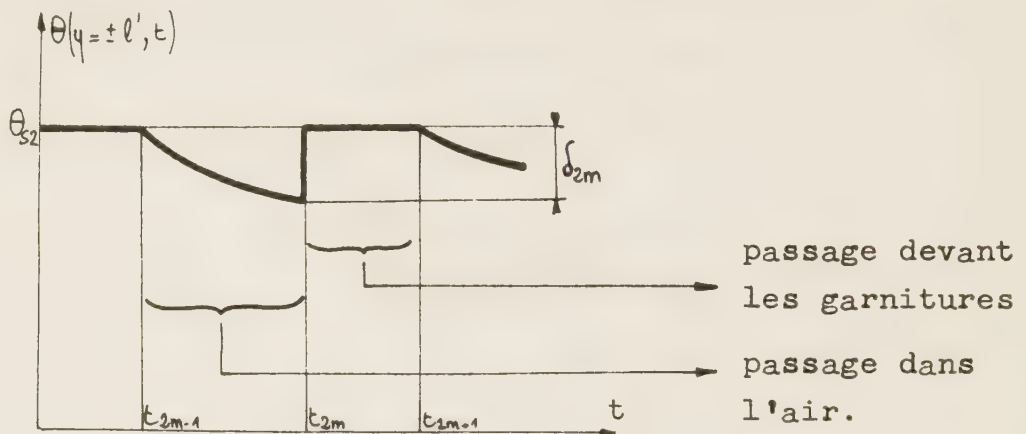
CD : Instant où le point du disque revient en contact avec les garnitures et prend comme température de surface une valeur différente de celle prise au début de la période AB.

## 5.

### DETERMINATION DES ECARTS DE TEMPERATURE DE SURFACE

PENDANT LA PERIODE  $T_1$ , T.

Durant cette phase de freinage, nous avons en surface une évolution de température présentant l'aspect suivant:



En considérant ce modèle d'évolution de température en surface, l'écart de température en fin de passage du point du disque dans le milieu ambiant est donné par la relation :

$$\begin{aligned}
\delta_{2m} &= \theta(y=l', t'_{2m} + \varepsilon) - \theta(y=l', t'_{2m} - \varepsilon) \\
&= \underbrace{\theta(y=l', t'_{2m})}_{\theta_{s2}} - \theta_{s2} + \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m}) \right]_{y=l'} \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 (t'_{2m} - t'_{2m-1})} \cdot \cos \alpha_n l'}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'} \right\}
\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
\delta_{2m} \theta(l', t_{2m}) &= \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-1}) \right]_{y=l'} \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 (t'_{2m} - t'_{2m-1})}}{l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda}} \right\}
\end{aligned}$$

Dans le cas où  $s2$  est légèrement croissant (dans le cas d'un milieu très limité) nous aurions :

$$\begin{aligned}
\delta_{2m} &= \theta_{s2}(t'_{2m}) - \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}(t'_{2m})) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-1}) \right]_{y=l'} \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 (t'_{2m} - t'_{2m-1})}}{l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda}} \right\} - \theta_{s2}(t_{2m-2})
\end{aligned}$$

Les valeurs de  $\theta_{s2}(t_{2m})$  et  $\theta_{s2}(t_{2m-2})$  sont relevées sur la courbe représentant la température de surface.

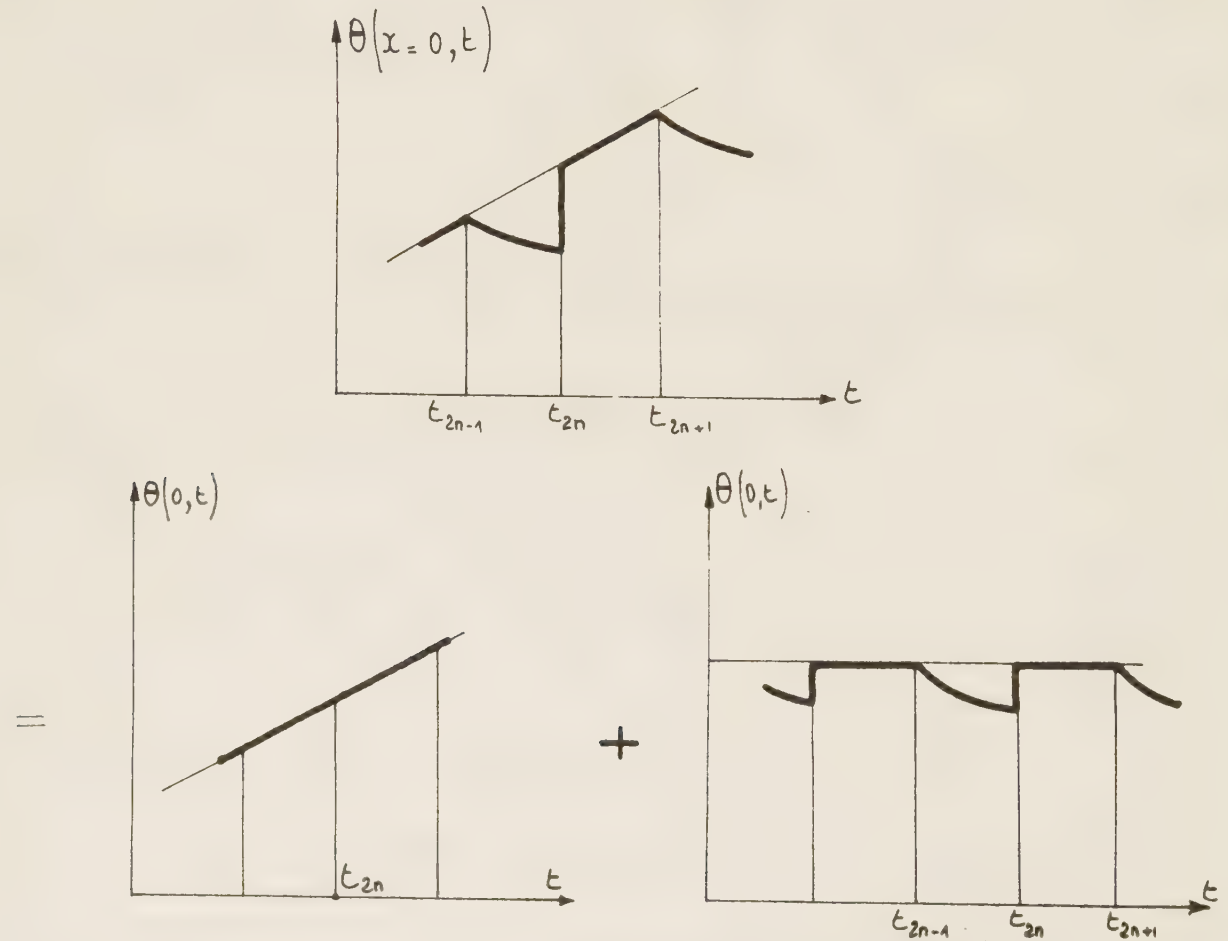
Comme pour les premiers instants du freinage, nous ne pourrions déduire quelle est la méthode de  $\theta_{s2}$  constante ou de  $\theta_{s2}$  pris pas à pas, la plus correcte qu'après avoir examiné



les résultats des essais. (voir le chapitre correspondant)

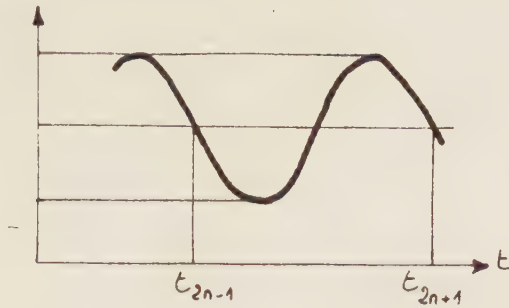
# DETERMINATION DE "L'ÉPAISSEUR DE PEAU" DU DISQUE

6. Durant les deux phases du freinage c'est à dire pour  $t$  compris entre 0 et  $T_1$  et  $t$  compris entre  $T_1$  et  $T$ , nous pouvons approximativement assimiler les sollicitations thermiques de surface à des sollicitations pseudo-périodiques. Nous pouvons ainsi avoir un ordre de grandeur de la profondeur à partir de laquelle les phénomènes thermiques ne sont plus visibles dans le disque.



Isolons le phénomène pseudo-périodique et assimilons le à une programmation de température de surface d'amplitude

et de période (  $t_{2n+1} - t_{2n-1}$  ) soit :



La valeur de la pulsation est :

$$\omega_{2n} = \frac{2\pi}{(t_{2n+1} - t_{2n-1})}$$

Explicitons  $\theta(x,t)$  en coordonnées réduites :

$$\theta^*_{(x,t)} = \frac{\theta(x,t) - \theta_i}{\delta_{2n}}$$

$\theta_i$  étant la température du milieu avant la sollicitation thermique.

- Posons  $\theta^* = u(x) \cdot e^{i \cdot \omega_{2n} t}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{i \cdot \omega_{2n}}{\alpha} \cdot u \longrightarrow u = A \cdot e^{-\sqrt{\frac{i \cdot \omega_{2n}}{\alpha}} \cdot x} \\ &= A \cdot e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega_{2n}}{2\alpha}} x} = A \cdot e^{-(1+i)\frac{x}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

La valeur  $\varepsilon = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega_{2n}}}$  est appelée "l'épaisseur de peau".

La relation donnant la température en coordonnées réduites s'écrit alors :

$$\theta^*_{(x,t)} = e^{-x/\varepsilon} \cdot \cos(\omega_{2n} t - x/\varepsilon)$$

Le déphasage étant  $x/\varepsilon$  ; et l'amortissement  $e^{-x/\varepsilon}$ .

On considère pratiquement que lorsque  $x = 5\varepsilon$ , le signal thermique est éteint.

En effet  $e^{-5}$  est de l'ordre de  $7 \cdot 10^{-3}$ .

Ceci permet de déterminer la profondeur à laquelle ces signaux sont éteints :

$$x_0 = 5 \sqrt{\frac{2a}{\omega_{2n}}}$$

Il est à remarquer que cette profondeur est indépendante de l'amplitude du signal thermique émis.

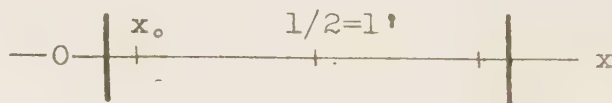
Explicitons cette relation en fonction des intervalles de temps :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{5 \sqrt{2a}}{\sqrt{2\eta}} \cdot \sqrt{(t_{2n+1} - t_{2n-1})} = \\ &= 10,35 \cdot 10^{-3} \sqrt{(t_{2n+1} - t_{2n-1})} \text{ pour la fonte.} \end{aligned}$$

$$x_0 \approx 10^{-2} \sqrt{(t_{2n+1} - t_{2n-1})}$$

Cette expression représente la profondeur à partir de laquelle l'influence de l'échange thermique par convection entre le disque et le milieu ambiant n'est plus sensible.

Au delà de cette profondeur  $x_0$ , c'est à dire :



de  $x_0$  à  $l/2$  et de  $l/2$  à  $l - x_0$  par symétrie, nous pouvons calculer  $\theta(x, t)$  de 0 à  $T$  à l'aide des relations établies dans le chapitre traitant de la température de surface, c'est à dire en négligeant l'échange thermique par convection entre le disque

et le milieu ambiant, soit :

pour  $x$  compris entre  $x_0$  et  $l/2$  :

$$\begin{aligned} \theta(x,t) - \theta_i = \frac{2\ell'}{\pi^2\lambda} & \left[ \frac{\pi^2}{4\ell'^2} (q_0 - \alpha t) x^2 - \frac{\pi^2}{2} \frac{x}{\ell'} (q_0 - \alpha t) + \frac{mt}{2} \left( q_0 - \frac{\alpha t}{2} \right) - \right. \\ & - q_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \cos n\pi \frac{x}{\ell'} \cdot e^{-n^2 \cdot mt} + \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \cos n\pi \frac{x}{\ell'} - \\ & \left. - \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \cos n\pi \frac{x}{\ell'} \cdot e^{-n^2 \cdot mt} + \frac{\pi^2}{6} (q_0 - \alpha t) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

avec :  $m = \frac{\pi^2}{\ell'^2} a$

Il est possible, à l'aide de la relation précédente de connaître la différence de température entre la surface et le milieu du disque. Cette différence permet d'évaluer la valeur maximale des écarts de température à l'intérieur du disque.

En appliquant la formule :

$\Delta\theta = \theta(x,t) - \theta_i =$  relation (1) , nous obtenons comme valeur de la température dans le plan de symétrie à  $x = l'$  :

$$\begin{aligned} \theta(x=l',t) - \theta_i = \frac{2\ell'}{\pi^2\lambda} & \left[ -\frac{\pi^2}{12} (q_0 - \alpha t) + \frac{mt}{2} \left( q_0 - \frac{\alpha t}{2} \right) - \right. \\ & - q_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cdot e^{-n^2 \cdot mt} + \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4} - \\ & \left. - \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2 \cdot mt} \right] \end{aligned}$$

où  $l'$  représente la demi épaisseur du disque.

Pour la surface (  $x = 0$  ), nous avons la relation :

$$\Delta\theta = \theta(x=0, t) = \frac{2l'}{\pi^2\lambda} \left\{ \frac{mt}{2} \left( q_0 - \alpha \frac{t}{2} \right) + \frac{\pi^2}{6} \left( q_0 - \alpha t \right) - \right. \\ \left. - q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 mt} + \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 mt} \right\}$$

$$\Delta\theta = \frac{2l'q_0}{\pi^2\lambda} \left\{ \frac{mt}{2} \left( 1 - \frac{t}{2T} \right) + \frac{\pi^2}{6} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 mt} + \right. \\ \left. + \frac{1}{mT} \left( \frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 mt} \right) \right\}$$

Le terme  $\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 mt}$  peut être majoré, tout en

gardant une valeur très proche, par  $\frac{\pi^4}{90} - e^{-mt}$ , ceci en raison de la convergence rapide de  $e^{-n^2 mt}/n^4$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 mt}/n^2$  est minoré par  $e^{-mt}$ , ce qui entraîne finalement une faible majoration de  $\Delta\theta$ .

Ces deux simplifications permettent d'obtenir la relation suivante :

$$\theta(x=0, t) - \theta_i = \frac{2l'q_0}{\pi^2\lambda} \left\{ \frac{mt}{2} \left( 1 - \frac{t}{2T} \right) + \frac{\pi^2}{6} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) - e^{-mt} + \frac{1}{mT} \left( \frac{\pi^4}{90} - e^{-mt} \right) \right\}$$

L'expression  $\theta(x=l', t) - \theta_i$  peut être simplifiée en remplaçant ( erreur par défaut ) par  $e^{-mt}$  le terme :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \cdot e^{-n^2 mt} / n^2 \quad \text{et par } -e^{-mt} \quad \text{le terme } \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n e^{-n^2 mt} / n^4$$

Nous obtenons ainsi comme écart de température entre la surface et le milieu du disque :

$$\begin{aligned} \theta(x=0, t) - \theta(x=l', t) = & \frac{2l'q_0}{\pi^2 \lambda} \left\{ \left[ \frac{mt}{2} \left( 1 - \frac{t}{2T} \right) + \frac{\pi^2}{6} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{mT} \left( \frac{\pi^4}{90} - e^{-mt} \right) - e^{-mt} \left. \right] - \left[ \frac{mt}{2} \left( 1 - \frac{t}{2T} \right) - \frac{\pi^2}{12} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) + \right. \\ & + e^{-mt} + \frac{1}{mT} \left( \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi^4}{90} + e^{-mt} \right) \left. \right] \left. \right\} \\ & \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4} \end{aligned}$$

$$\theta(x=0, t) - \theta(x=l', t) = \frac{2l'q_0}{\pi^2 \lambda} \left[ \frac{\pi^2}{4} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) - 2e^{-mt} + \frac{\pi^4}{720 \cdot mT} \right]$$

$$t \in [0, T]$$

Cet écart de température peut être déterminé sans faire les approximations du paragraphe précédent aux instants  $t = T/2$  et  $t = T$ .

- Au milieu du coup de frein (  $t=T/2$  )

L'écart de température entre la surface et le milieu ambiant est :

$$\theta(x=l', T/2) - \theta_i = \frac{2l'q_0}{\pi^2 \lambda} \left\{ -\frac{\pi^2}{6} + \frac{3mT}{8} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n \cdot e^{-n^2 mT/2} + \right.$$



$$\left. + \frac{1}{mT} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{mT} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2 mT/2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \theta(x=0, T/2) - \theta_i &= \frac{2\ell'q_0}{\pi^2 \lambda} \left\{ \frac{3mT}{8} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 mT/2} + \frac{1}{mT} \cdot \frac{\pi^4}{90} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{mT} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2 mT/2} + \frac{\pi^2}{12} \right\} \end{aligned}$$

Ces expressions conduisent à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \theta(x=0, T/2) - \theta(x=\ell', T/2) &= \frac{2\ell'q_0}{\pi^2 \lambda} \cdot \left[ \frac{\pi^4}{720 \cdot mT} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \cdot e^{-n^2 mT/2} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 mT/2} + \frac{1}{mT} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2 mT/2} - \frac{1}{mT} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 mT/2} - \frac{\pi^2}{12} \right] \end{aligned}$$

- A la fin du coup de frein (t = T)

L'écart de température entre la surface et le milieu ambiant est :

$$\theta(x=0, T) - \theta_i = \frac{2\ell'q_0}{\pi^2} \left\{ \frac{mT}{4} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 mT} + \frac{\pi^4}{90 mT} - \frac{1}{mT} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 mT} \right\}$$

L'écart de température entre le plan de symétrie du disque et le milieu ambiant est:

$$\begin{aligned} \theta(x=\ell', T) - \theta_i &= \frac{2\ell'q_0}{\pi^2} \left\{ \frac{mT}{4} - \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot e^{-n^2 mT} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{mT} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{mT} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2 mT} \right\} \end{aligned}$$

La différence de ces deux expressions conduit à la relation suivante :

$$\theta(x=0, T) - \theta(x=l', T) = \frac{2l'q_0}{\pi^2 \lambda} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cdot e^{-n^2 m T} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 m T} \right. \\ \left. + \frac{1}{m T} \cdot \frac{\pi^4}{720} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2 m T} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2 m T} \right\}$$

Cet ensemble de relations, dont le récapitulatif est fait au chapitre suivant, permet de calculer la température en tout point du disque, à tout instant durant la période de freinage, moyennant toutefois l'hypothèse que la propagation du flux de chaleur a été considérée comme étant unidimensionnelle, ce qui signifie que les valeurs obtenues sont des valeurs moyennes, calculées sur un rayon moyen.

Une certaine incertitude provient du fait qu'il est délicat de fixer des valeurs telles que le coefficient de conductivité et sa variation avec la température ainsi que le coefficient de convection et sa variation avec la vitesse de l'air. La détermination du coefficient de convection est à l'annexe 13.

## 7.

### RECAPITULATIF

des RELATIONS OBTENUES

7.1

Détermination de la température de surface en milieu illimité.

$$\theta_s = \theta_i + \frac{2 \cdot q_0 \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right)$$

7.2

Détermination de la température réelle de surface en milieu limité.

$$\theta_s = \theta_i + \frac{2 \ell' q_0}{\pi^2 \lambda} \left[ \frac{mt}{2} \left( 1 - \frac{t}{2T} \right) + \frac{\pi^2}{6} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) + \frac{1}{mT} \left( \frac{\pi^4}{90} - e^{-mt} \right) - e^{-mt} \right]$$

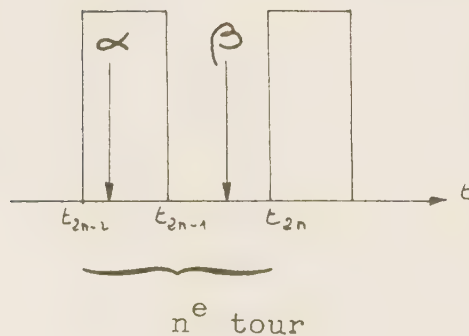
$$\text{avec : } m = \pi^2 a / l'^2$$

7.3

Détermination de la température dans le disque pendant les premiers instants du freinage.

- en considérant  $\theta_{s1}$  constante.

$$\theta_{s1} = \theta_i + \frac{4 q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \sqrt{T_1} \left( 1 - \frac{2}{5} T_1 \right)$$



α/

$$\begin{aligned}\Theta(x, t) &= \left( \theta_{s1} - \theta(0, t_{2n-2}) \right) \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-2})}} + \theta(x, t_{2n-2}) \\ &= \left[ \left( \theta_{s1} - \theta_i \right) \frac{h}{\lambda} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-3}) \right]_{x=0} \right] \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a (t_{2n-2} - t_{2n-3})} \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_{2n-2} - t_{2n-3})} \right\} \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-2})}} + \theta(x, t_{2n-2})\end{aligned}$$

β/

$$\begin{aligned}\Theta(x, t) &= \left\{ \left( \theta_i - \theta_{s1} \right) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} \right\} \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} - \right. \\ &\quad \left. - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} x + \frac{h^2}{\lambda^2} a (t-t_{2n-1})} \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t-t_{2n-1})} \right\} + \theta(x, t_{2n-1})\end{aligned}$$

- en considérant  $\theta_{s1} = \theta_i + \mu t$

$$\begin{aligned}\alpha/ \quad \Theta(x, t) &= \mu (t - t_{2n-2}) \left\{ \left( 1 + \frac{x^2}{2a(t-t_{2n-2})} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-2})}} - x \cdot \frac{e^{-x^2/4a(t-t_{2n-2})}}{\sqrt{a\pi(t-t_{2n-2})}} \right\} + \theta(x, t_{2n-2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta/ \quad \Theta(x, t) &= \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_{2n-1}) \right]_{x=0} - \frac{h}{\lambda} \mu t_{2n-1} \right\} \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} - \right. \\ &\quad \left. - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} x + \frac{h^2}{\lambda^2} a (t-t_{2n-1})} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t-t_{2n-1})} \right) \right\} + \theta(x, t_{2n-1})\end{aligned}$$

$$\mu = \frac{8q_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_0}} \left( 1 - \frac{2T_0}{5T} \right)$$

- Détermination de l'amplitude des chocs thermiques en surface :

$$\delta_{2n} \theta(0, t_{2n}) = \frac{2q_0}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\lambda \rho c}} \cdot \left[ \sqrt{t_{2n}} \left( 1 - \frac{2t_{2n}}{3T} \right) - \sqrt{t_{2n-1}} \left( 1 - \frac{2t_{2n-1}}{3T} \right) \right] +$$

$$+ \left\{ \frac{h}{\lambda} \mu t_{2n-1} - \left[ \frac{\partial \theta(x, t_{2n-1})}{\partial x} \right]_{x=0} \right\} \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a (t_{2n} - t_{2n-1})} \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_{2n} - t_{2n-1})} \right\}$$

**7.4** Détermination de la température dans le disque durant la période comprise entre  $T_1$  et  $T$ .

$$\theta_{s2} = \text{constante} \quad y = x - l'$$

$$\alpha/ \quad \theta(y, t) = \theta(y, t'_{2m-2}) + \left( \theta_{s2} - \theta(y, t'_{2m-2}) \right) \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \frac{e^{-\frac{(2i+1)^2 \pi^2}{4l'^2} (t - t'_{2m-2})}}{2i+1} \cdot \cos \frac{(2i+1)\pi y}{2l'} \right\}$$

$$\beta/ \quad \theta(y, t) = \theta(y, t'_{2m-1}) + \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \theta(y, t'_{2m-1})}{\partial y} \right]_{y=l'} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-a\alpha_n^2 (t - t'_{2m-1})} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'} \right\}$$

- Détermination de l'amplitude des chocs thermiques en surface :

$$\delta_{2m} \theta(l', t_{2m}) = \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \theta(y, t'_{2m-1})}{\partial y} \right]_{y=l'} \right\} \left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-a\alpha_n^2 (t_{2m} - t'_{2m-1})}}{l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda}} \right\}$$

**7.5** Profondeur à laquelle l'échange libre avec l'air n'est plus sensible.

$$x_0 \approx 10^{-2} \sqrt{t_{2n+1} - t_{2n-1}}$$

**7.6** Evolution de la température dans le disque pour  
 $x_0 < x < 1-x_0$  de  $t = 0$  à  $t = T$

$$\begin{aligned} \theta(x, t) - \theta_i &= \frac{2\ell'}{\pi^2 \lambda} \left\{ \frac{\pi^2}{4\ell'^2} x^2 \left( q_0 - \alpha t \right) - \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{x}{\ell'} \left( q_0 - \alpha t \right) + \frac{m t}{2} \left( q_0 - \frac{\alpha t}{2} \right) \right. \\ &\quad - q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \cos n\pi \frac{x}{\ell'} \cdot e^{-n^2 m t} + \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \cos n\pi \frac{x}{\ell'} - \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \cos n\pi \frac{x}{\ell'} \cdot e^{-n^2 m t} + \frac{\pi^2}{6} \left( q_0 - \alpha t \right) \right\} \\ \text{avec : } m &= \frac{\pi^2}{\ell'^2} \alpha \end{aligned}$$

**7.7** Différence de température entre la surface et le milieu du disque.

$$\theta(x=0, t) - \theta(x=\ell', t) \approx \frac{2\ell' q_0}{\pi^2 \lambda} \left[ \frac{\pi^2}{4} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) - 2 e^{-m t} + \frac{\pi^4}{720 \cdot m T} \right]$$

- au milieu du coup de frein :  $t = T/2$

$$\begin{aligned} \theta(x=0, T/2) - \theta(x=\ell', T/2) &= \frac{2\ell' q_0}{\pi^2 \lambda} \left\{ \frac{\pi^2}{720 \cdot m T} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cdot e^{-n^2 m T/2} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot e^{-n^2 m T/2} + \frac{1}{m T} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2 m T/2} - \frac{1}{m T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2 m T/2} - \frac{\pi^2}{12} \right\} \end{aligned}$$



- à la fin du coup de frein, à  $t = T$  :

$$\begin{aligned} \theta(x=0, T) - \theta(x=l', T) = & \frac{2l'q_0}{\pi^2\lambda} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} e^{-n^2 m T} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 m T} \right. \\ & \left. + \frac{\pi^2}{720 \cdot m T} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4} e^{-n^2 m T} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 m T} \right\} \end{aligned}$$


---

**3**

**O**RGANIGRAMMES

**P**ROGRAMMES

**R**ESULTATS

## CALCUL DE $\theta(x,t)$ EN MILIEU LIMITE

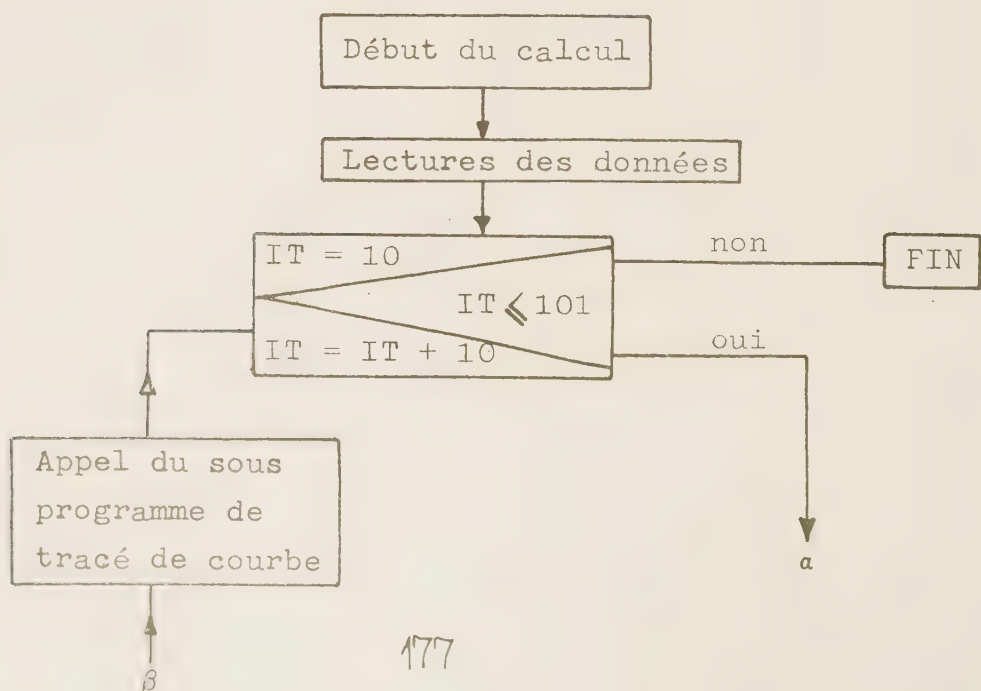
Détermination de l'évolution de la température dans le disque en supposant :

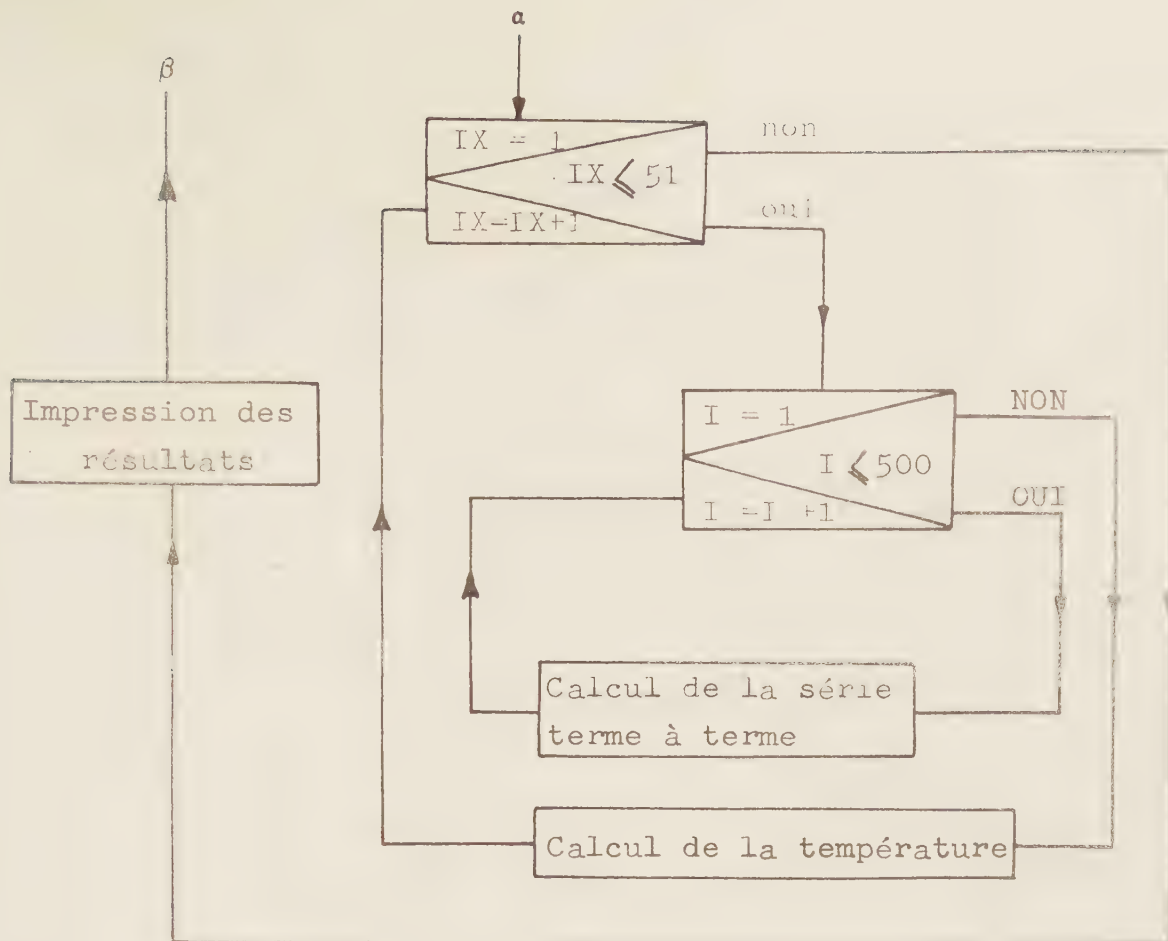
- la température de surface imposée est égale à 1 000°C
- que le disque est assimilé à un milieu limité symétrique,
- que la température initiale dans le disque est 20°C,
- que le flux de chaleur est nul dans le plan de symétrie.

$\theta(x,t)$  est donnée par la relation :

$$\theta(x,t) = \theta_i + (\theta_s - \theta_i) \left( 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \exp\left(-\frac{\alpha(2n+1)^2 t}{4l^2}\right) \cdot \cos\frac{2n+1}{2l} \cdot x \right)$$

### A.1 ORGANIGRAMME.





## A.2

### PROGRAMME

```

// FOR
*IOCS(1403PRINTER)
*IOCS(CARD)
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
  REAL MVOL
  DIMENSION B(500) ,TEMP(52)
  LCARD=2
  IMP=5
  READ (LCARD,1) TI,TP,T,EPAIS,COEF,CAP,MVOL
1  FORMAT(7E10.3)
  WRITE(IMP,6)
6  FORMAT(1H0,T5,'EPAISSEUR',T20,'COEFFICIENT',T35,'CAPACITE CALORIMETRIQUE',T60,'MASSE VOLUMIQUE')
  WRITE(IMP,5)EPAIS,COEF,CAP,MVOL
5  FORMAT(1H0,T5,E9.3,T20,E9.3,T35,E9.3,T60,E9.3)
  WRITE (IMP,2)TP
2  FORMAT(1H0,'TEMPERATURE DES PLAQUETTES =',F6.1,'DEGRES C°')
  DIFFU=COEF/(CAP*MVOL)
  E1=EPAIS/2000
  WRITE (IMP,3) TI
3  FORMAT (1H0,'TEMPERATURE DE DEBUT =',F6.1,'DEGRES C°')
  DO 500 IT=1,101,10
  T=(IT-1.)/100.
  WRITE(IMP,4) T
4  FORMAT(1H1,20H*****/1X10H* TEMPS = ,F4.2,50H)

```

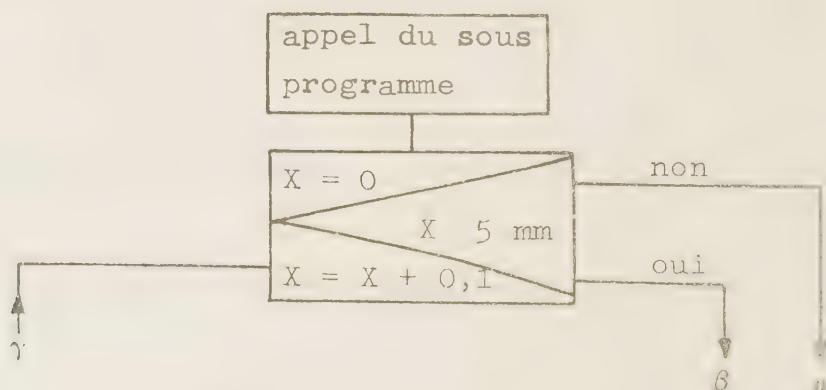
```

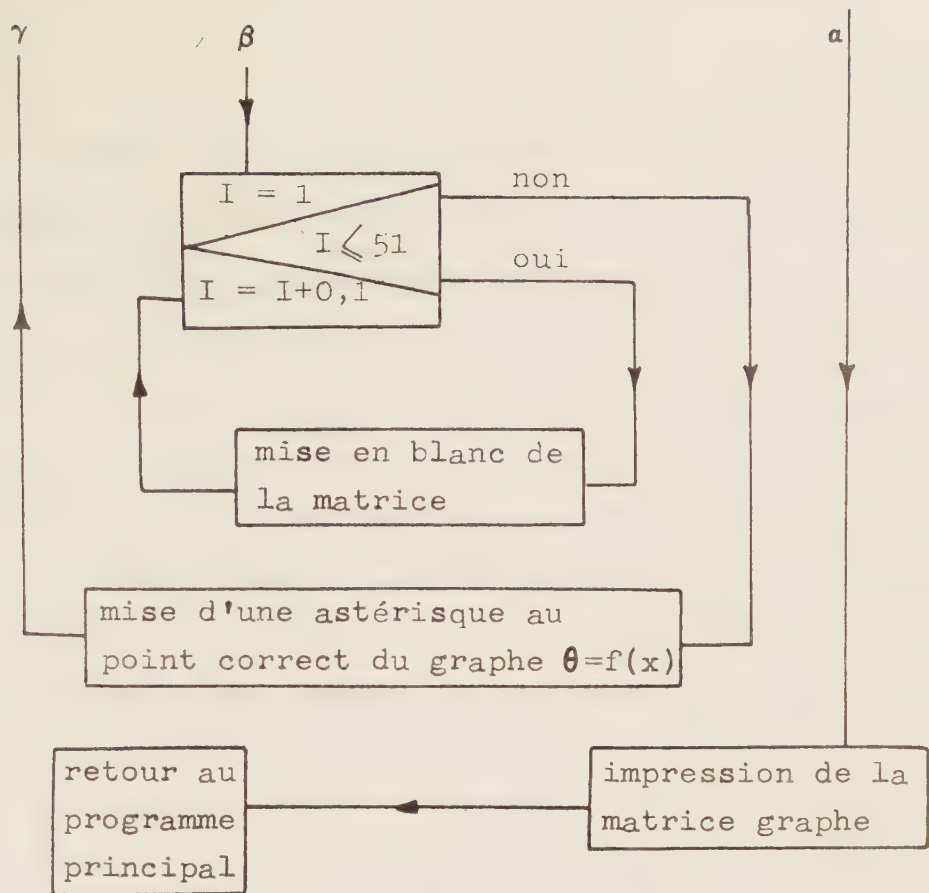
11X20H*****
A=EXP(-DIFFU*3.14159**2*I/(4*E1**2))
XX=-0.0001
DO 10 IX=1,51
XX=XX+0.0001
X1=E1-XX
D=3.14159*X1/(2.*F1)
SOM=0
DO 20 I=1,500
N=I-1
K=2*N+1
B(I)=((A**K)*COS(K*D))/K
SOM=SOM+B(I)*((-1)**N)
IF(ABS(B(I))-ABS(B(I-1))-1.0E-30) 30,30,20
20 CONTINUE
30 TEMP(IX)=TI+(TP-TI)*((1-4.*SOM/3.14159)
X2=(IX-1.)/10.
10 CONTINUE
WRITE (5,506)
DO 501 KK=1,6
L=(KK-1)*10+1
LL=KK*10+1
WRITE (5,505) (TEMP(II),II=L,LL)
505 FORMAT(1H ,T20,11(1H*,F5.0),'*')
WRITE (5,506)
506 FORMAT(1H ,T20,67(1H*))
501 CONTINUE
CALL TRACT(TEMP,I)
500 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

**A.3** Afin d'avoir directement sous forme de courbes, l'évolution de la température dans le disque nous avons fait appel à un sous programme de tracé de courbe. Les graphes obtenus sont des thermogrammes topologiques.

A31 - Organigramme.





### A3.2 Programme

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINETRACT(TEMP,I)
  DIMENSION TEMP(51),IIT(51),II(51,51)
  DO 10 I=1,51
    IT=IFIX(TEMP(I)/20.)
    IIT(I)=20*I
    DO 20 J=1,51
20    II(J,I)=16448
10    II(IT,I)=23616
    WRITE(5,50)
50    FORMAT(1H1,10X,'TEMPERATURE')
    DO 30 K=1,51
      I=52-K
      WRITE (5,52) IIT(I),(II(I,J),J=1,51)
52    FORMAT (1H ,6X,15,'+',51A1)
30    CONTINUE
    WRITE (5,54)
54    FORMAT(1H , 'TEMP',6X,'+',6(10H-----+))
    WRITE (5,56)
56    FORMAT(1H , 'X=',9X,'0',9X,'1',9X,'2',9X,'3',9X,'4',9X,'5')
    RETURN
  END
  
```



$\theta(x,t)$  étant calculée dans le cas d'une programmation de température en surface, dans un milieu limité symétrique, nous allons déterminer l'évolution de la température dans le cas d'une programmation de température en surface appliquée à un milieu semi infini.

Nous prendrons une température de surface de 1 000°C et une température initiale dans le disque de 20°C.

$\theta(x,t)$  est donnée par la relation :

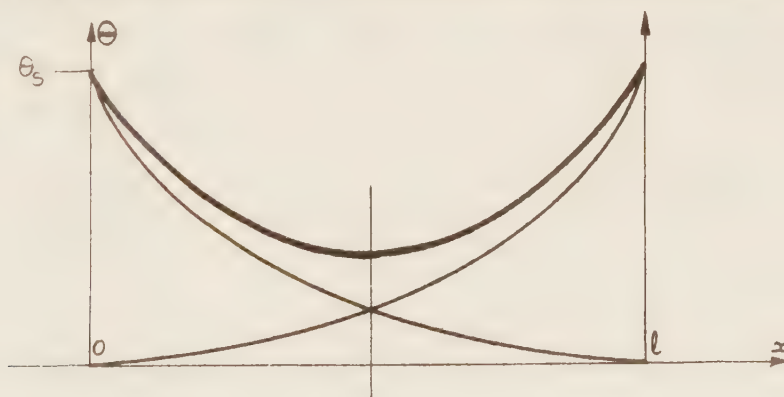
$$\theta(x,t) = \theta_i + (\theta_s - \theta_i) \left( 1 - \operatorname{erf} x/2\sqrt{at} \right) \\ = 980 \cdot \operatorname{erfc} \left( x/2\sqrt{at} \right) + 20$$

|                 |                |       |       |       |       |
|-----------------|----------------|-------|-------|-------|-------|
| <u>x = 1 mm</u> | t              | 0,4   | 0,6   | 0,8   | 1     |
|                 | $x/2\sqrt{at}$ | 0,22  | 0,185 | 0,155 | 0,139 |
|                 | erfc           | 0,75  | 0,795 | 0,820 | 0,841 |
|                 | $\theta$       | 755   | 800   | 825   | 845   |
| <u>x = 3 mm</u> | $x/2\sqrt{at}$ | 0,66  | 0,555 | 0,465 | 0,416 |
|                 | erfc           | 0,351 | 0,439 | 0,510 | 0,562 |
|                 | $\theta$       | 362   | 450   | 520   | 570   |
| <u>x = 5 mm</u> | $x/2\sqrt{at}$ | 1,10  | 0,925 | 0,775 | 0,695 |
|                 | erfc           | 0,12  | 0,19  | 0,275 | 0,332 |
|                 | $\theta$       | 137   | 206   | 290   | 344   |
| <u>x = 8 mm</u> | $x/2\sqrt{at}$ | 1,76  | 1,48  | 1,24  | 1,10  |
|                 | erfc           | 0,013 | 0,034 | 0,072 | 0,12  |
|                 | $\theta$       | 32    | 54    | 90    | 132   |

En reportant sur le même graphe les résultats obtenus en considérant le milieu limité et le milieu semi-infini, il est possible de chiffrer l'erreur commise en utilisant le modèle thermique du mur semi infini jusqu'à l'instant noté  $T_1$ . En fixant une valeur limite de l'erreur admissible, nous pouvons alors déterminer la valeur de la borne supérieure de  $T_1$ .

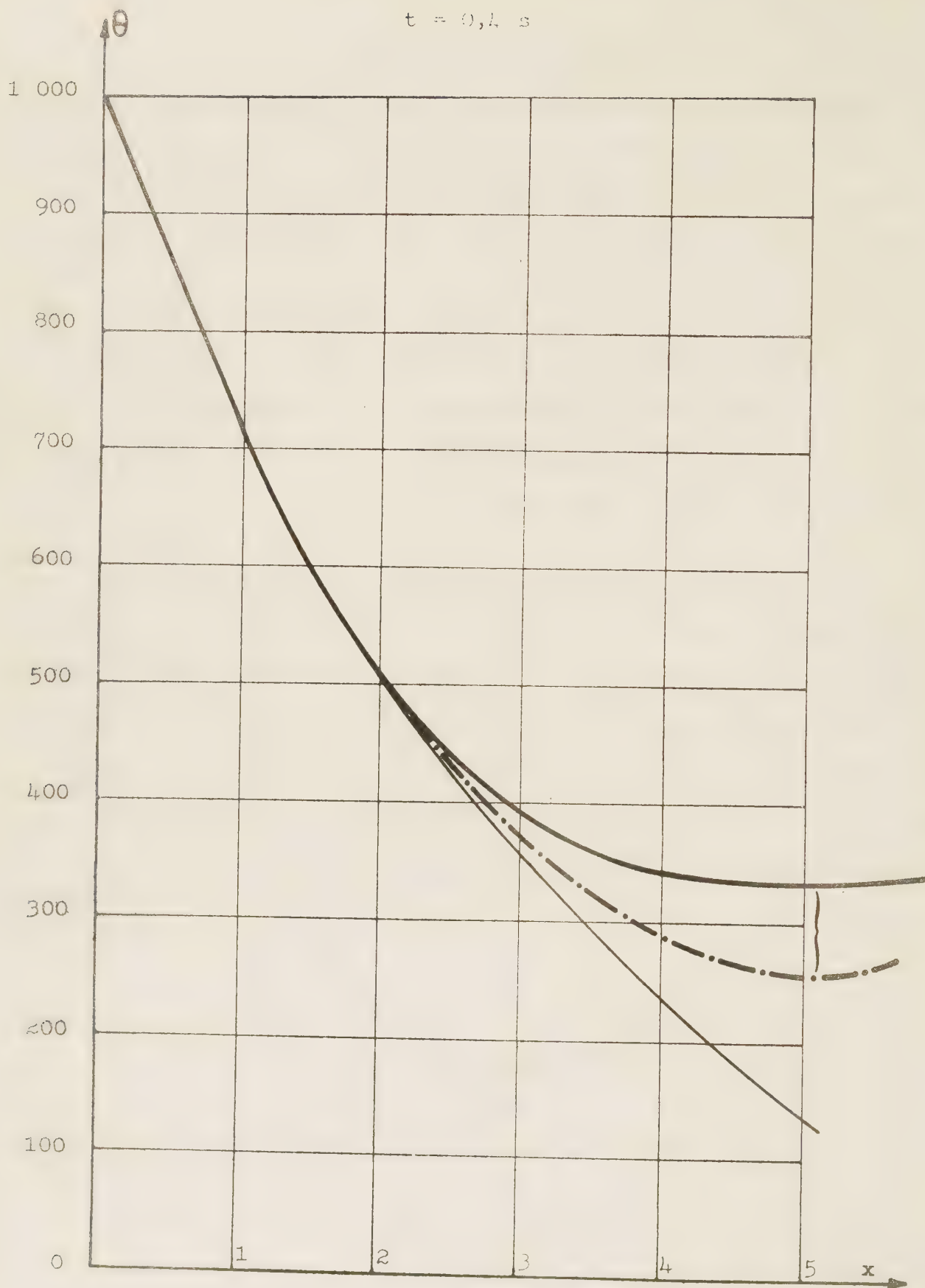
Pour calculer  $T_1$ , il faut tenir compte du fait que pour le problème étudié, la programmation de température de surface n'est appliquée que pendant  $2/15$  de tour. Il faudra donc faire subir à l'échelle des temps une affinité.

Nous observons sur les courbes des pages suivantes, où la ligne en trait fort représente le thermogramme topologique en milieu limité symétrique, la ligne en trait mixte représente le thermogramme topologique en milieu semi infini en considérant la superposition des températures, la ligne en trait fin représente le thermogramme topologique en milieu semi infini, qu'en superposant les températures calculées en milieu semi-infini,

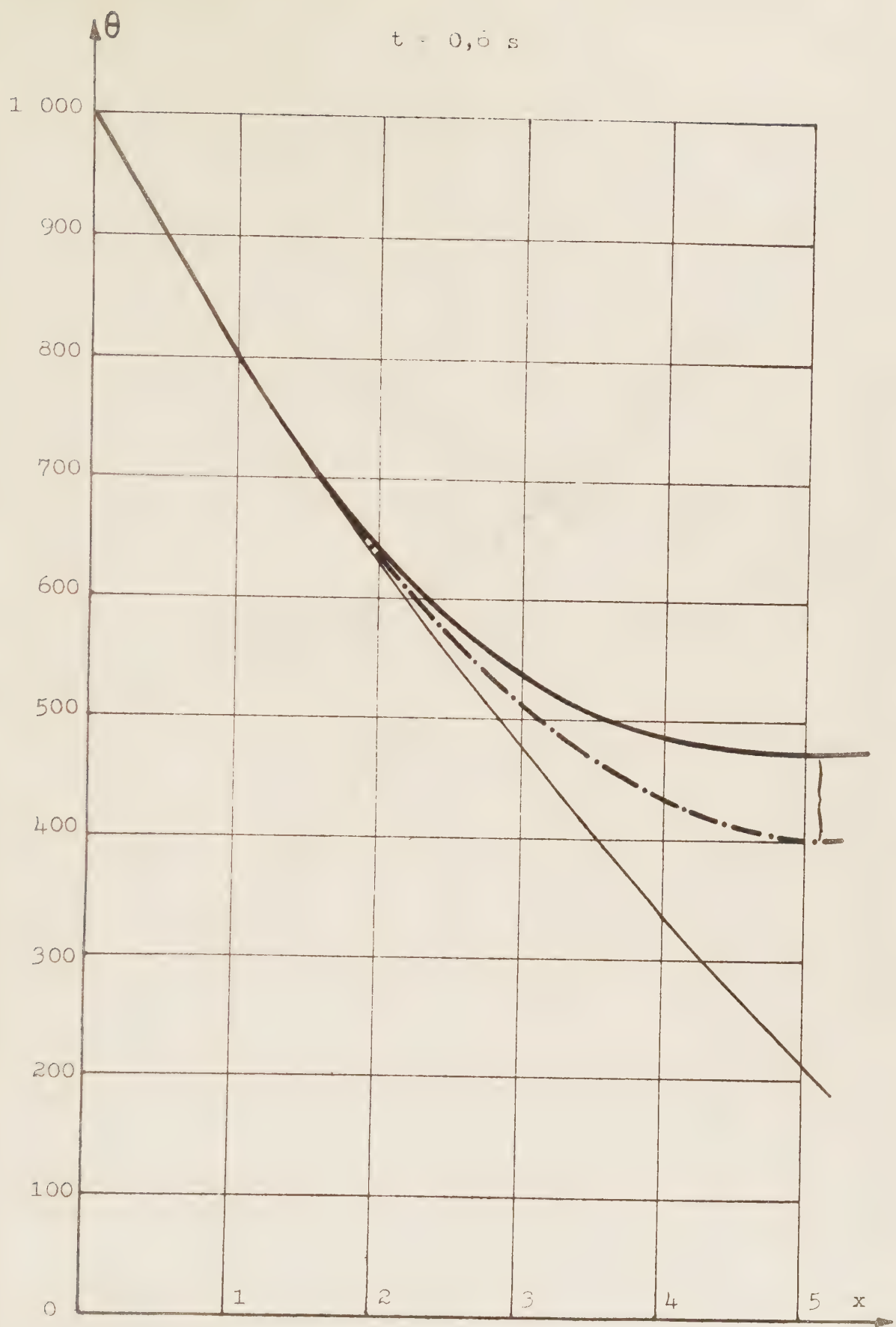


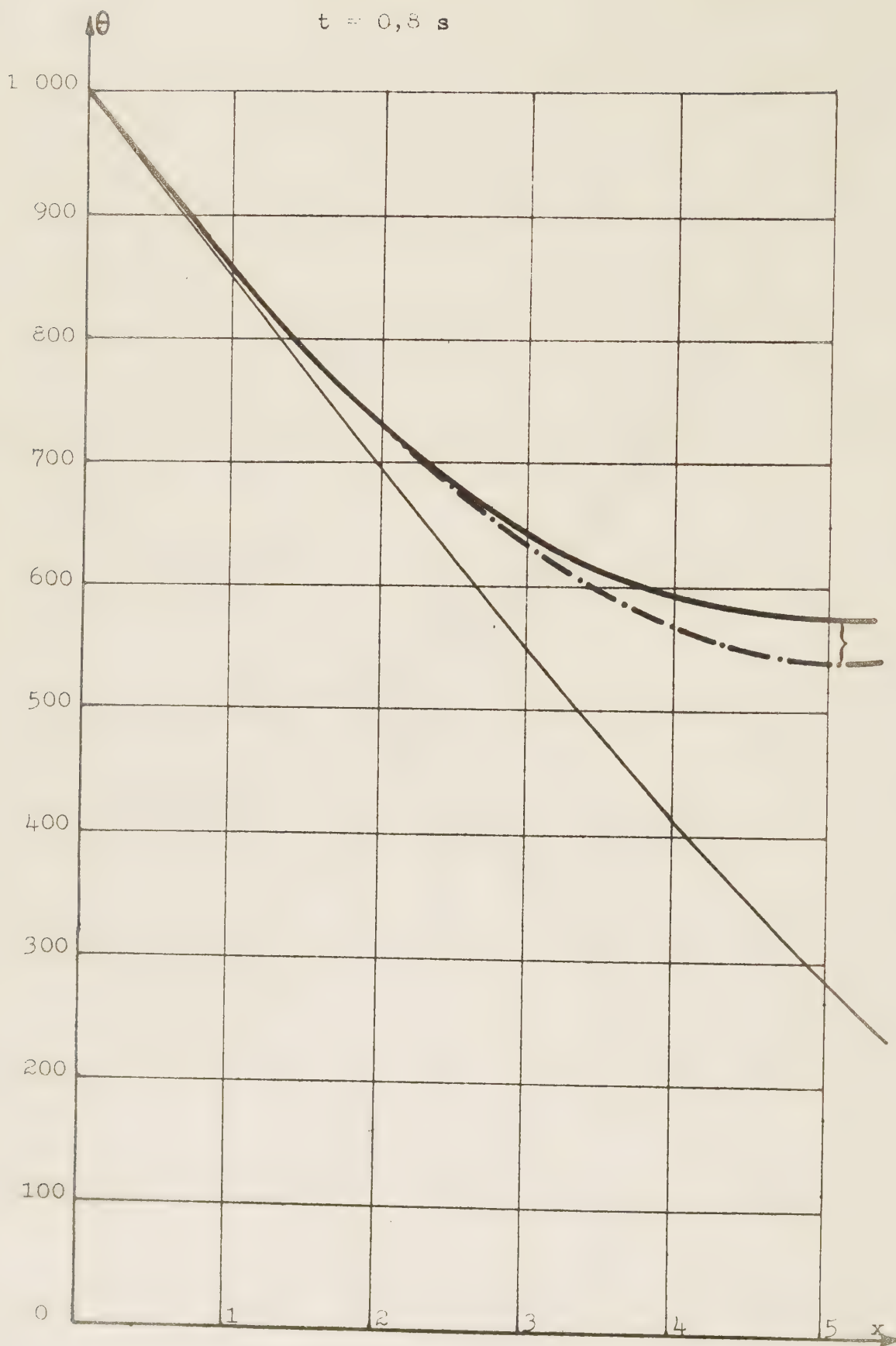
nous obtenons des valeurs de  $\Theta(x,t)$  assez proches des valeurs calculées en considérant le milieu limité symétrique, à flux de chaleur nul dans le plan médian; l'erreur commise est de

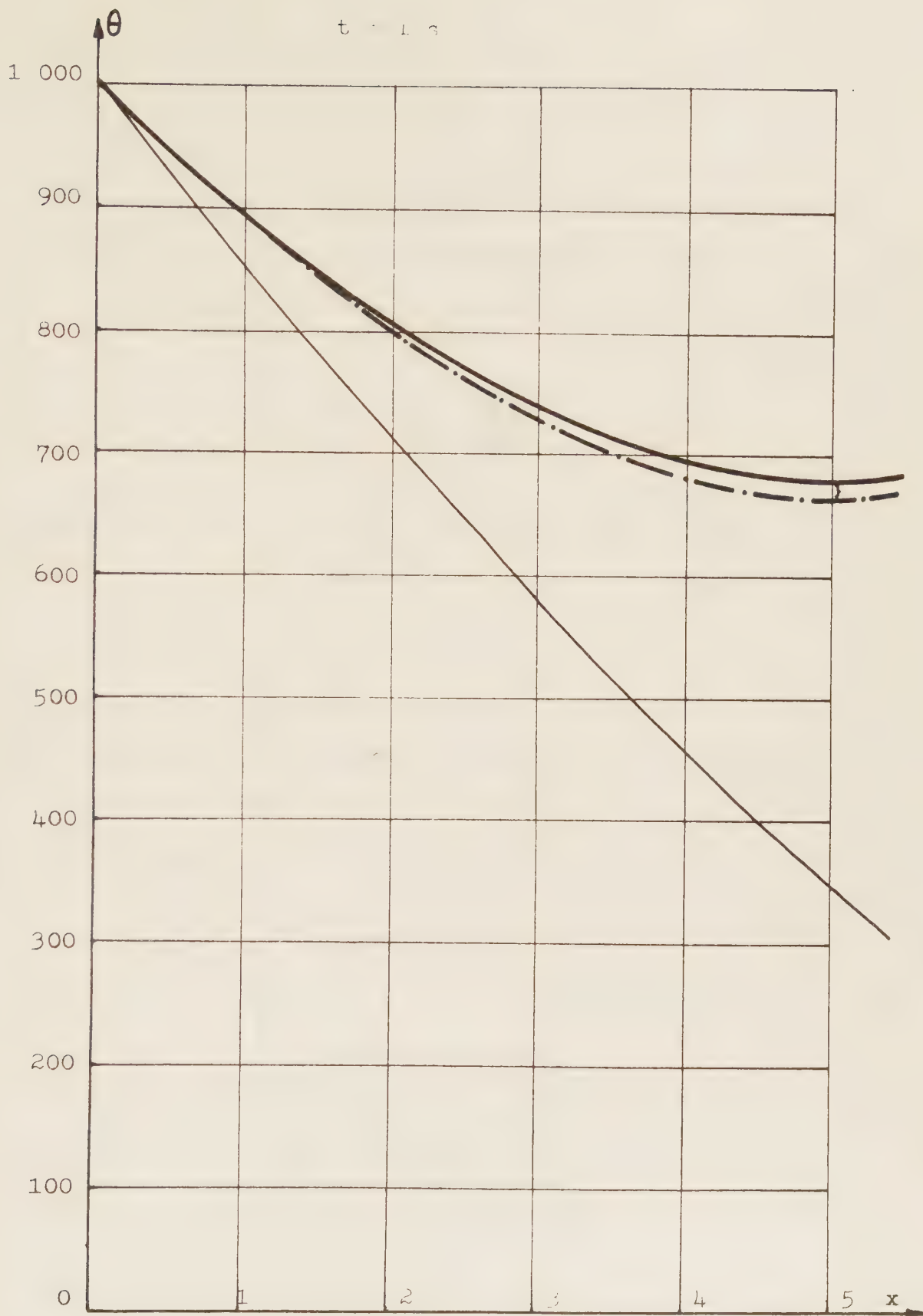
$t = 0,4 \text{ s}$



$t = 0,0 \text{ s}$









l'ordre de 5%.

La limite de validité de cette méthode de calcul (superposition des états en milieu semi infini), en ce qui concerne la variable  $t$  est en dehors des périodes de freinage considérées.  $T_1$  sera donc défini en fonction de l'aspect du graphe (thermogramme chronologique) de température de surface (conditions précisées précédemment dans le chapitre 2).

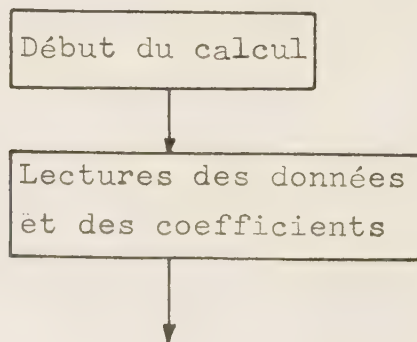
## B

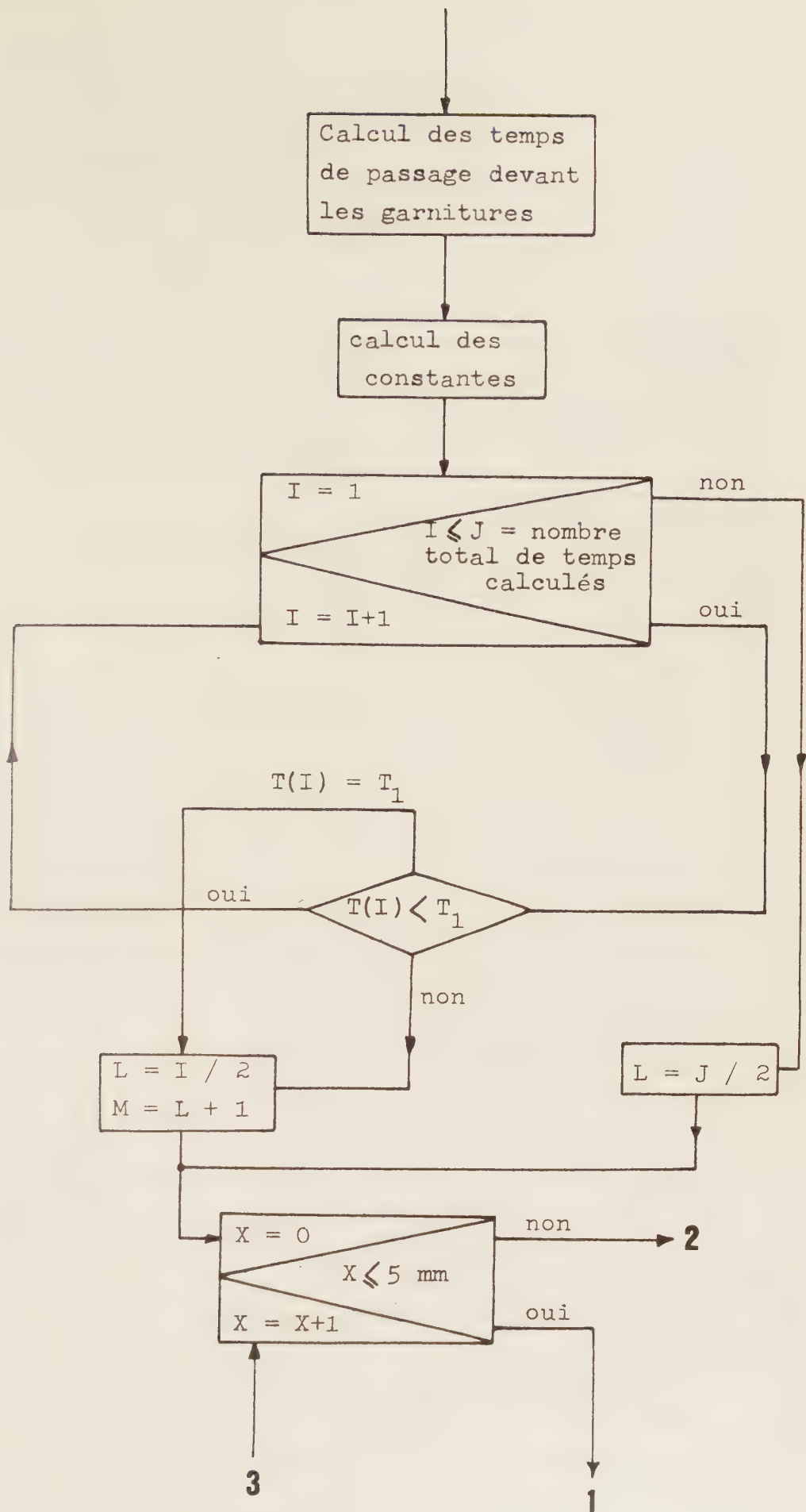
### CALCUL DES TEMPERATURES EN MILIEU LIMITE en tenant compte de l'ECHANGE CONVECTIF.

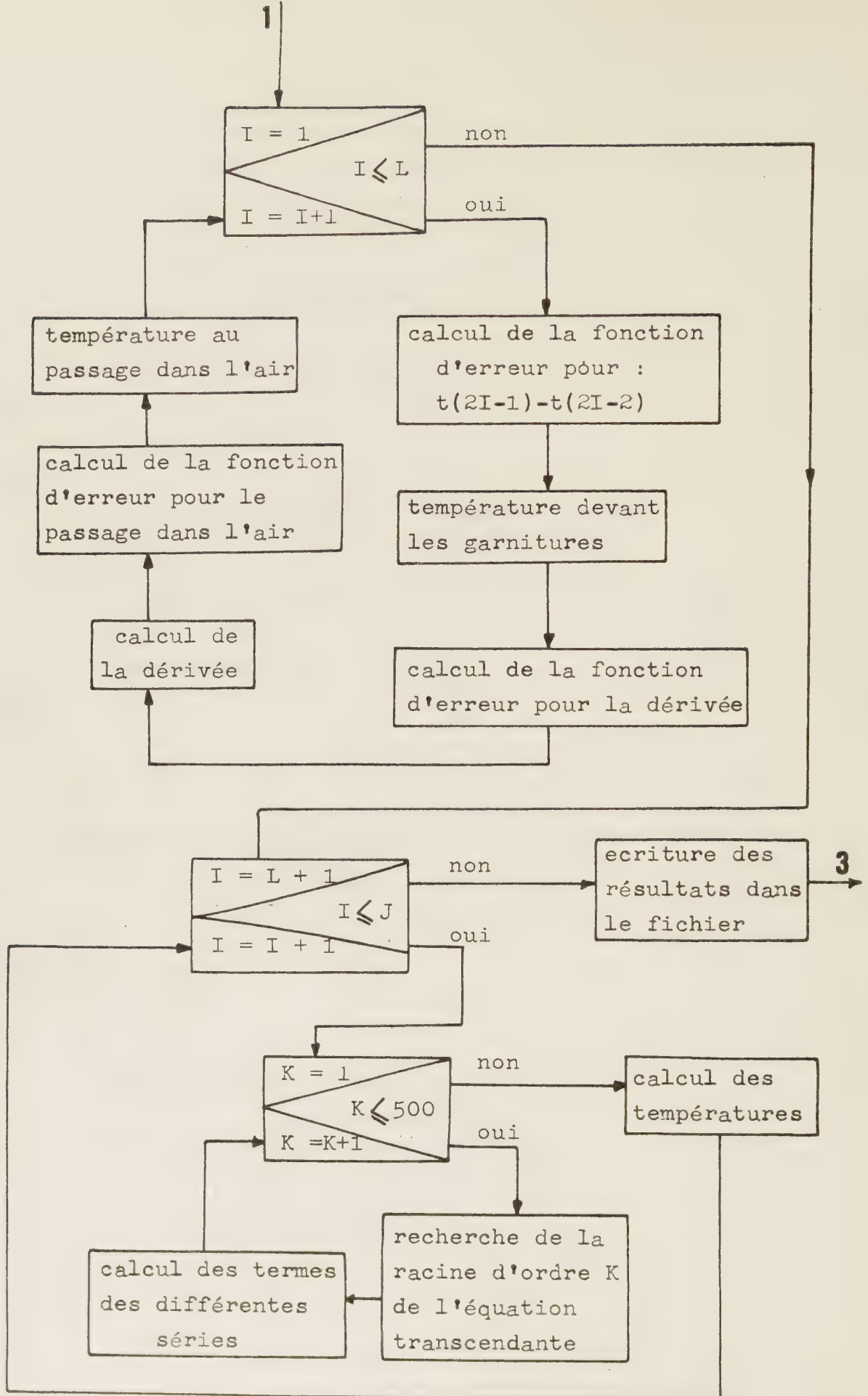
Dans ce calcul, le milieu thermique est symétrique, durant le passage d'un point particulier du disque devant les garnitures, il y a programmation de température en surface, et échange thermique par convection lors du passage de ce point dans le milieu ambiant.

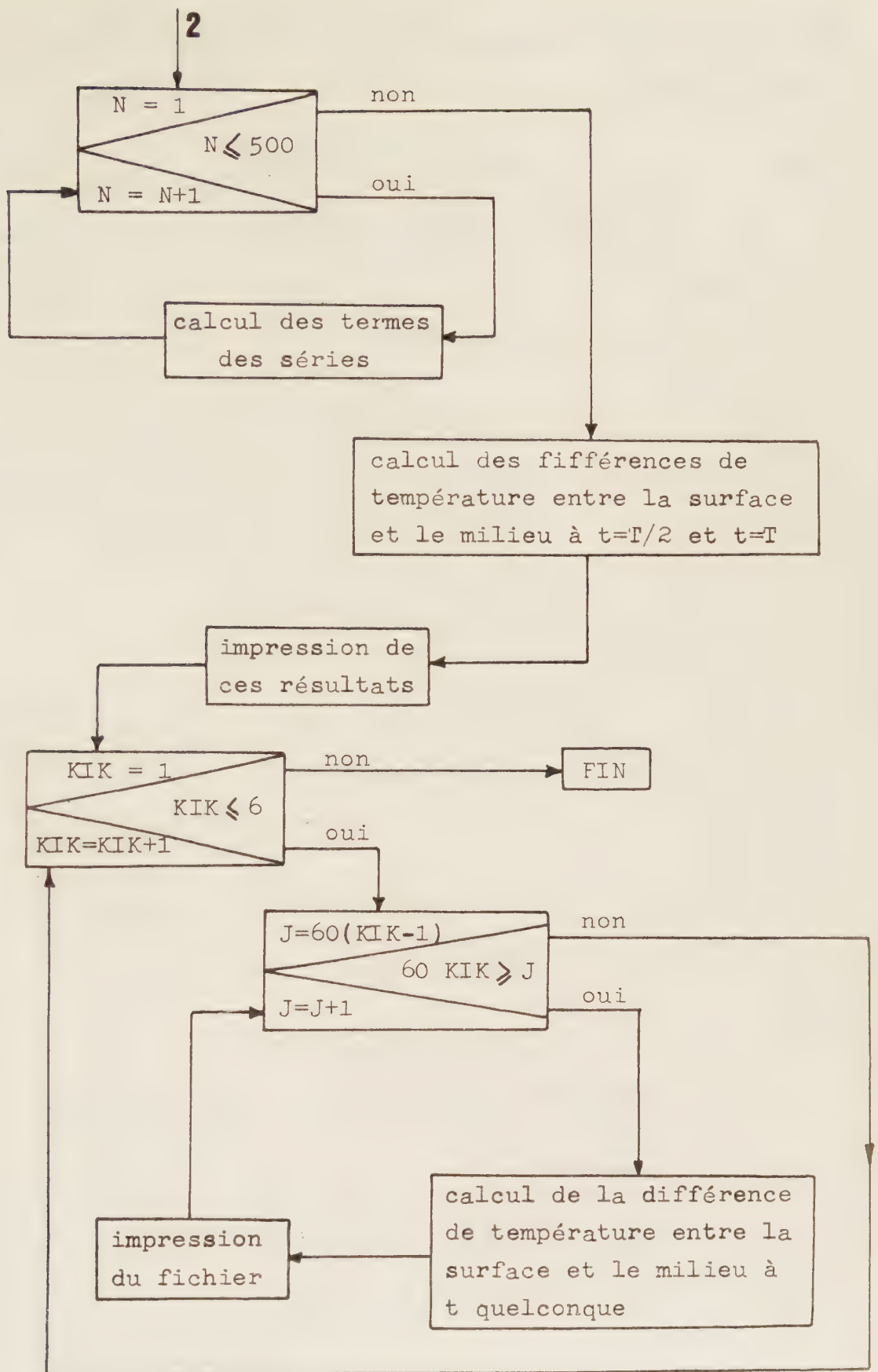
#### A.1

##### ORGANIGRAMME









## B.2

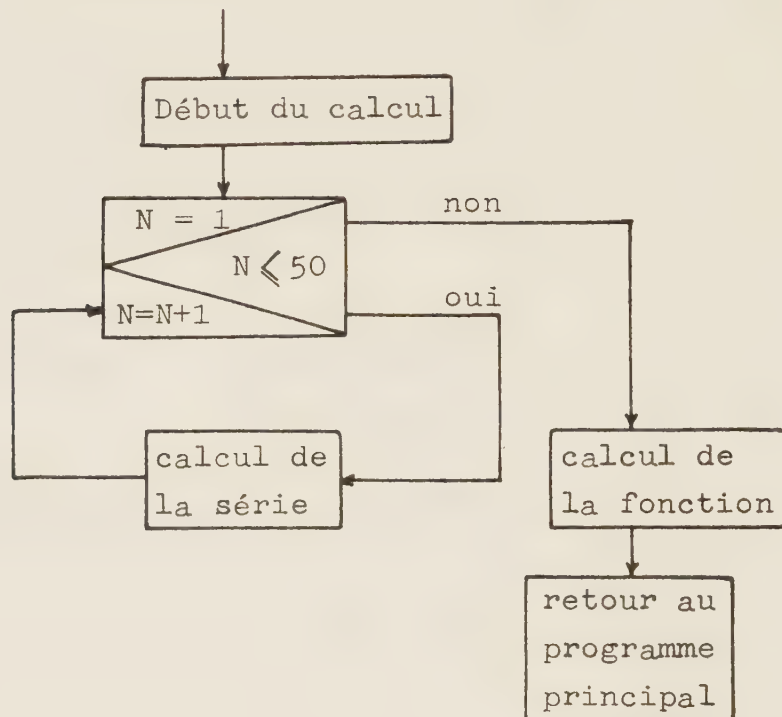
Dans ce programme, nous devons faire appel à trois sous programmes :

12.1

-Sous programme de calcul de la fonction d'erreur.

La relation utilisée est celle du développement en série (cf annexe 5)

Organigramme :

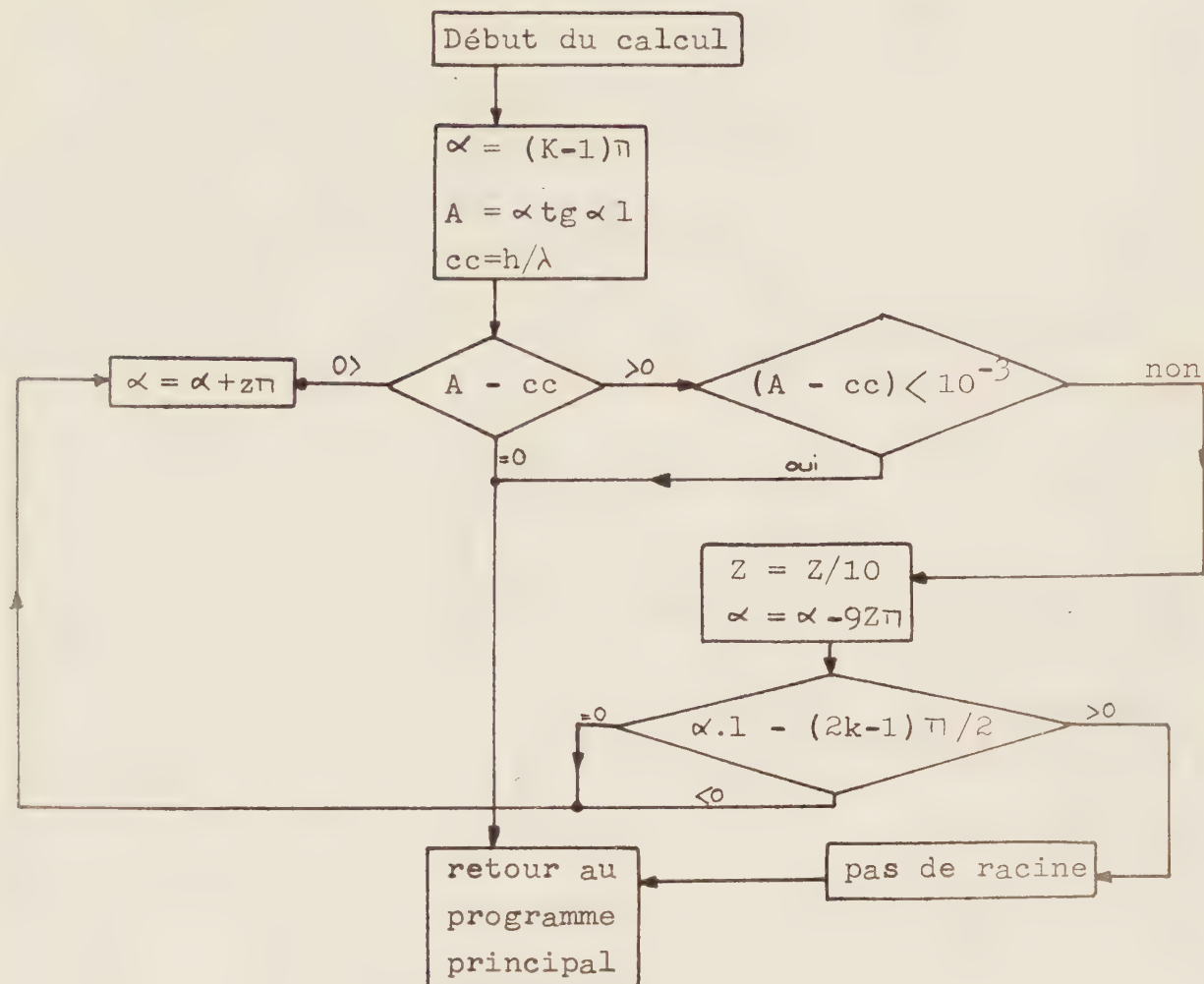


Programme :

```
SUBROUTINE ERR(Y,ERFC)
  IMP=5
  A=Y
  SOMME=A
  DO 10 N=1,50
  A=(-1)*A*(Y**2)*(2*N-1)/(N*(2*N+1.))
  SOMME=SOMME+A
10 CONTINUE
ERFC=1.0-SOMME/SQRT(3.14159)
RETURN
END
```

8.2.2 - Sous programme de résolution de l'équation transcendante.

Organigramme :



- Programme :

```

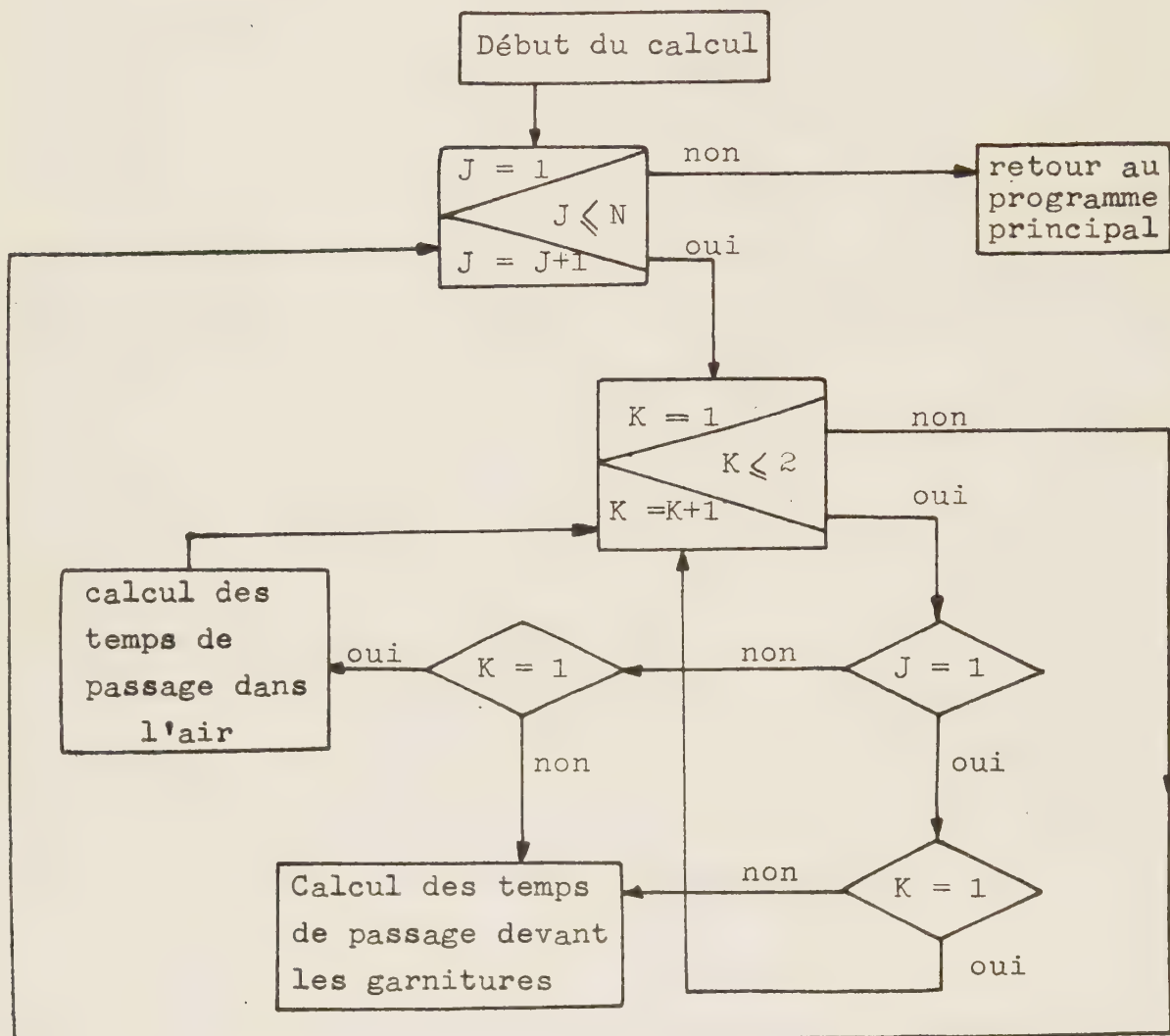
SUBROUTINE AAANI(ALFA,K,PI,E,CC)
ALFA=(K-1)*PI
Z=1.
50 AL=ALFA*E
A=ALFA*SIN(AL *E)/COS(AL *E)
IF(A-CC) 20,30,40
20 ALFA=ALFA+Z*PI
GO TO 50
40 IF (ABS(A-CC)-1.0E-01) 30,30,60
60 Z=Z/10.
ALFA=ALFA-9.*Z*PI
IF (AL -(2*K-1)*PI/2) 70,70,80
70 GOTO 50
80 WRITE(5,500)
500 FORMAT(1H ,'PAS DE RACINE POUR L EQUATION TRANSCENDANTE')
30 RETURN
END

```



**1.2.3 - Sous programme de calcul des temps de passage**  
d'un point particulier du disque, devant les garni-  
tures et dans l'air.

**1.2.3.1 Organigramme :**



**1.2.3.2 - Programme (avec impression des résultats)**

```

SUBROUTINE DISQ(V ,N, T)
DIMENSION T(325)
B=V/3.6
DO 10 J=1,N
DO 20 K=1,2
I=(J-1)*2+K
C=((J-1)*6.283+(K-1)*2*6.283/15.)*0.26
T(I)=(-B+SQRT(B*B-4.63*4.*C))/(-9.26)
  
```

```

      IA=I-1
      IF (J-1)30,40,30
40    IF (K-1)50,60,50
60    WRITE(5,200)
200   FORMAT (1H1,30X,40(1H*))
201   FORMAT (1H0,30X,40(1H*))
      WRITE (5,300) V
300   FORMAT (1H0,30X,'*',2X,'VITESSE INITIALE EGALE A',F5.1,'KM/H',
1*)
      WRITE (5,201)
      WRITE(5,401)
401   FORMAT(///,23X,'T(0)= INSTANT OU LE POINT VA FRANCHIR LA PLAQUE
1',/)
600   FORMAT(1H0,10X,'J=',I3,10X,'K=',I3,10X,'T(',I3,')=',F7.5,10X,
1Q=',F7.5)
      GO TO 20
50    GO TO 70
30    IF (K-1)70,80,70
70    L=2*J
      M=L-1
      TPLAQ=T(L)-T(M)
      GO TO 10
80    L=2*J-1
      M=L-1
      TAIR=T(L)-T(M)
500   FORMAT(1H0,10X,'J=',I3,10X,'K=',I3,10X,'T(',I2,')=',F7.5)
700   FORMAT(1H0,10X,'J=',I3,10X,'K=',I3,10X,'T(',I3,')=',F5.3,33X,
1=',F5.3)
20    CONTINUE
10    CONTINUE
      RETURN
      END

```

B233. - Résultats de ce sous programme pour une vitesse initiale du véhicule de 100 km/h.

| temps écoulé depuis<br>le début du freinage | temps de passage<br>devant les garni-<br>tures | temps de passage<br>dans l'air |
|---------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------|
| T(0) = 0.00000                              |                                                |                                |
| 1 = 0.00784                                 | 0.00784                                        |                                |
| 2 = 0.05934                                 |                                                | 0.05150                        |
| 3 = 0.06735                                 | 0.00800                                        |                                |
| 4 = 0.11991                                 |                                                | 0.05256                        |
| 5 = 0.12809                                 | 0.00817                                        |                                |
| 6 = 0.18178                                 |                                                | 0.05369                        |

|                |         |         |
|----------------|---------|---------|
| T(7) = 0.19014 | 0.00835 |         |
| 8 = 0.24504    |         | 0.05490 |
| 9 = 0.25359    | 0.00854 |         |
| 10 = 0.30979   |         | 0.05620 |
| 11 = 0.31854   | 0.00875 |         |
| 12 = 0.37613   |         | 0.05759 |
| 13 = 0.38510   | 0.00897 |         |
| 14 = 0.44419   |         | 0.05908 |
| 15 = 0.45340   | 0.00921 |         |
| 16 = 0.51411   |         | 0.06070 |
| 17 = 0.53258   | 0.00947 |         |
| 18 = 0.58606   |         | 0.06247 |
| 19 = 0.59581   | 0.00975 |         |
| 20 = 0.66021   |         | 0.06439 |
| 21 = 0.67027   | 0.01006 |         |
| 22 = 0.73679   |         | 0.06651 |
| 23 = 0.74720   | 0.01040 |         |
| 24 = 0.81605   |         | 0.06885 |
| 25 = 0.82683   | 0.01078 |         |
| 26 = 0.89829   |         | 0.07145 |
| 27 = 0.90950   | 0.01120 |         |
| 28 = 0.98388   |         | 0.07438 |
| 29 = 0.99557   | 0.01168 |         |
| 30 = 1.07327   |         | 0.07769 |
| 31 = 1.08551   | 0.01223 |         |
| 32 = 1.16701   |         | 0.08150 |
| 33 = 1.17987   | 0.01286 |         |
| 34 = 1.26580   |         | 0.08592 |
| 35 = 1.27940   | 0.01359 |         |
| 36 = 1.37056   |         | 0.09115 |
| 37 = 1.38504   | 0.01448 |         |
| 38 = 1.48252   |         | 0.09748 |
| 39 = 1.49808   | 0.01555 |         |
| 40 = 1.60342   |         | 0.10533 |
| 41 = 1.62034   | 0.01691 |         |
| 42 = 1.73581   |         | 0.11546 |
| 43 = 1.75452   | 0.01871 |         |

|                      |                 |         |         |
|----------------------|-----------------|---------|---------|
| 26 <sup>e</sup> tour | T(44) = 1.88376 |         | 0.12923 |
|                      | 45 = 1.90499    | 0.02123 |         |
|                      | 46 = 2.05453    |         | 0.14954 |
|                      | 47 = 2.07969    | 0.02515 |         |
|                      | 48 = 2.26380    |         | 0.18411 |
|                      | 49 = 2.29638    | 0.03257 |         |
|                      | 50 = 2.56359    |         | 0.26721 |
|                      | 51 = 2.62098    | 0.05738 |         |

On peut remarquer que les temps de passage devant les garnitures et dans l'air sont très courts.

#### 824. - Programme principal .

```

REAL MVOL,MU
DIMENSION TETA(6),TATE(325),T(325)
DEFINE FILE 1(325,12,U,NFXT)
9  READ (2,9) COEF,MVOL,CAP,T1,TS2 ,T1
  FORMAT(8E10.3)
10 READ (2,10) V,NNNN
  FORMAT( F10.3,14)
  J=NNNN*2
  Q0=0.135*51.6*V/0.0068
  CALL DISQ(V, NNNN,T)
  E=0.005
  PI=3.14159
  TT=T(J)
  DIFFU=COEF/(CAP*MVOL)
  PI2=PI*PI
  TT2=TT/2.
  CM=((PI2/(E*E))*DIFFU
  MU=((8*Q0)/(3.*SQRT(3.14159*COEF*CAP*MVOL*T1)))*(1.-(2.*T1)/(5.
1))
DO 20 I=1,J
  IF (T1-T(I)) 30,30,20
30  L=I/2
  M2=L+1
  GO TO 40
20  CONTINUE
  L=J/2
40  SOM4=0.
  R15=1.
  SOM5=0.
  DO 141 N=1,500
  M=N*N
  MM=M*M

```

```

AA=(-2. )/M+(-2. )/(CM*MM*TT)
SOM4=SOM4+EXP(-M*CM*TT2)*AA
141 SOM5=SOM5+EXP(-M*CM*TT)*AA
BB=2.*E1*QO/(PI2*COEF)
DIFF1=BB*(SOM5+(PI2*PI2)/(CM*TT*720.))
DIFF2=BB*(PI2/(720.*CM*TT)+SOM4+PI2/12.)
WRITE (5,103)
WRITE (5,105) DIFF1
WRITE (5,104 )
WRITE (5,106) DIFF2
DO 180 IX=1,6
IND=IX
X=(IX-1.)/1000.
DERIV=0.
DO 50 I=1,L
I1=2.*I
I2=2.*I-1
I3=2.*I-2
TA=T(I2)
TC=T(I1)
IF(I-1) 111,111,112
111 TD=0.
TB=0.
TATA=TI
GO TO 113
112 I3=2*I-2
I4=2*I-3
TB=T(I3)
I4=2*I-3
TD=T(I4)
TATA=TATE(I3)
113 A=DIFFU*(TA-TB)
B=DIFFU*(TC-TA)
Y=X/(2.*SQRT(A))
CALL ERR(Y,ERFC)
E1=E
TATE(I2)=MU*(TA-TB)*(1.+X*X)/(2.*A) *ERFC-(X*(-(Y*Y)))/SQRT(A*3.14
1159)+TATA
H=15.+12.7*(TT-TA)
CC=H/COEF
Y=(CC*SQRT(DIFFU*(TA-TD))) )
CALL ERR(Y,ERFC)
BC=SQRT(DIFFU*(TB-TD))
BCB=EXP(CC*CC*BC)
DERIV=DERIV+MU*(TA-TB)*(-(2.+SQRT(PI)))/(2.*SQRT(A*PI))+(DERIV-(CO
1*MU*TD))*((BCB -1.)/(2.*BC)-CC*BCB*ERFC )
H=15.+12.7*(TT-TC)
CC=H/COEF
Y=X/(2.*SQRT(B))
CALL ERR (Y,ERFC)
Z=Y+CC*SQRT(B)
CALL ERR(Z,ERCF )
TATE(I1)=(DERIV-CC*MU*TA)*(ERFC-EXP(CC*(X+CC*B*ERCF)))+TATE(I2)
WRITE (5,293)T(I1), TATE (I1),TATE (I2),T(I2)
50 CONTINUE

```



```

WRITE (5,5345)
5345 FORMAT (1H , 'JE COMMENCE LA DEUXIEME PARTIE DU CALCUL')
LLL=J/2
DO 70 I=M2,LLL
  I1=2.*I
  I2=2.*I-1
  I3=2.*I-2
  TA=T(I2)
  TB=T(I3)
  TC=T(I1)
  I4=2*I-3
  TD=T(I4)
  Y=E-X
  H=15.+12.7*(TT-TC)
  CC=H/COEF
  CALL AAAN1(PI,E,CC,TA,TB,TC,DIFFU,Y,PI2,SOM1,SOM2,SOM3)
  TATE(I2)=(TS2-TATE(I3) )*(1.-(4./PI)*SOM2)+TATE(I3)
  DERIV      =(TS2-TATE(I2) )*(2./E)*SOM1
  TATE(I1)=(CC*(TI-TS2)-DERIV      )*(1+(COEF/H)-2.*SOM3)+TATE(I2)
  WRITE (5,293)T(I1), TATE (I1),TATE (I2),T(I2)
70  CONTINUE
293  FORMAT(1H ,4(1H*,F10.0),1H*)
  DO 456 I=1,J
  READ(1'I) TETA
  TETA(IND)=TATE(I)
  WRITE(1'I) TETA
456  CONTINUE
294  FORMAT (1H ,10(F9.1))
180  CONTINUE
103  FORMAT(1H0,'DIFFERENCE DE TEMPERATURE A LA FIN DU COUP DE FREIN
104  FORMAT(1H , 'DIFFERENCE DE TEMPERATURE AU MILIEU DU COUP DE FREIN
105  FORMAT(/,T30,F10.0)
106  FORMAT(/,T30,F10.0)
  JJ=J/60+1
  DO 561 KIK=1,JJ
  LL=60*(KIK-1) +1
  LLL=60*KIK
  WRITE (5,303)
  WRITE (5,304)

304  FORMAT(1H ,T20,'* TEMPS *TO-TM * X= 0MM * X= 1MM * X= 2MM * X=
1MM * X= 4 MM * X= 5MM *')
  DO 666 J=LL,LLL
  READ(1'J) TETA
  WRITE (5,303)
  DIFFA=(2.*E1*Q0/(PI2*E1))*(PI2/4.*(1.-T(J)/TT)/2*EXP(-CM*T(J))+
1/(CM*TT))*(PI2*PI2)/720.)
  WRITE (5,302) T(J),DIFFA , (TETA(I),I=1,6)
666  CONTINUE
561  CONTINUE
  WRITE (5,303)
303  FORMAT(1H ,T20,73(1H*))
302  FORMAT(1H ,T20,1H*,F6.3,2X,'*',F6.0,2X,'*',6(F6.0,2X,'*'))
  CALL EXIT
  END

```





## B.2.5

Type de programme particulier pour le calcul de la fonction d'erreur.

Il est délicat de calculer la valeur de  $\text{erf}(x)$  car suivant que  $x$  soit supérieur ou inférieur à une certaine valeur (3,5) il faut employer soit un développement en série soit un développement asymptotique.

Une autre méthode consiste à rentrer en mémoire des valeurs de  $\text{erf}(x)$ , puis à utiliser un programme d'interpolation.

SOUS-PROGRAMME D'INTERPOLATION A UNE VARIABLE  $Y(X)$  :

Les points donnés  $X(I)$ ,  $Y(I)$ , au nombre de  $N$ , sont supposés rangés par abscisses croissantes mais pas nécessairement équidistantes.

L'interpolation s'effectue:

- par arcs de cubiques dans le cas général.
- par arcs paraboliques sur le premier et le dernier intervalle et lorsqu'il y a extrapolation.
- linéairement si la table ne comporte que 2 points.

L'interpolation assure la continuité de la dérivée.

ORDRE D'APPEL

CALL INT1C(X,Y,N,AX,AY,IE)

Données:

$X(I)$ ,  $Y(I)$  blocs donnant les abscisses et ordonnées des points de la table.

$N$  nombre des points de la table.

$AX$  abscisse du point à interpoler.

Résultats:

$AY$  ordonnée interpolée

IE = 0 dans le cas normal.

IE = 1 en cas d'extrapolation. X extérieur au segment X(1), X(N).

En cas d'incident :

- N incorrect

- abscisses confondues ou décroissantes

il y a impression d'un diagnostic.

### PROGRAMME

```
DIMENSION X(1),Y(1),YP(2)
AY=Y(1)
IE=0
IF(N-2)7,6,1
1 ID=0
DO 2 I=2,N
IF(X(I).LE.X(I-1)) GO TO 7
IF(AX.LE.X(I)) GO TO 3
2 CONTINUE
ID=1
I=N
3 IF(AX.LT.X(1)) ID=1
IC=1
IF(I.EQ.2) IC=2
IF(I.EQ.N) IC=3
C
C IC=1 CAS GENERAL
C IC=2 PREMIER INTERVALLE OU EXTRAPOLATION A GAUCHE
C IC=3 DERNIER INTERVALLE OU EXTRAPOLATION A DROITE
C
J1=2-MOD(IC,2)
J2=2-IC/3
DO 4 J=J1,J2
K=I+J-2
DX1=X(K+1)-X(K)
DX2=X(K-1)-X(K+1)
DX3=X(K)-X(K-1)
```

```

      IF(QX1xDX2xDX3.GE.0.) GO TO 7
      DA1=AX-X(K-1)
      DA2=AX-X(K)
      DA3=AX-X(K+1)
4  YP(J)=-Y(K-1)xDA2xDA3/(DX2xDX3)-Y(K)xDA1xDA3/(DX1xDX3)
1      -Y(K+1)xDA1xDA2/(DX1xDX2)
      IF(IC.GE.2) GO TO 5
      AY=((AX-X(I-1))xYP(2)+(X(I)-AX)xYP(1))/(X(I)-X(I-1))
      RETURN
5  AY=YP(J1)
      IF(ID.NE.0) IE=1
      RETURN
      PRINT 100
100 FORMAT(38H SOUS-PROGRAMME INT1C.TABLE INCORRECTE)
      RETURN
      END

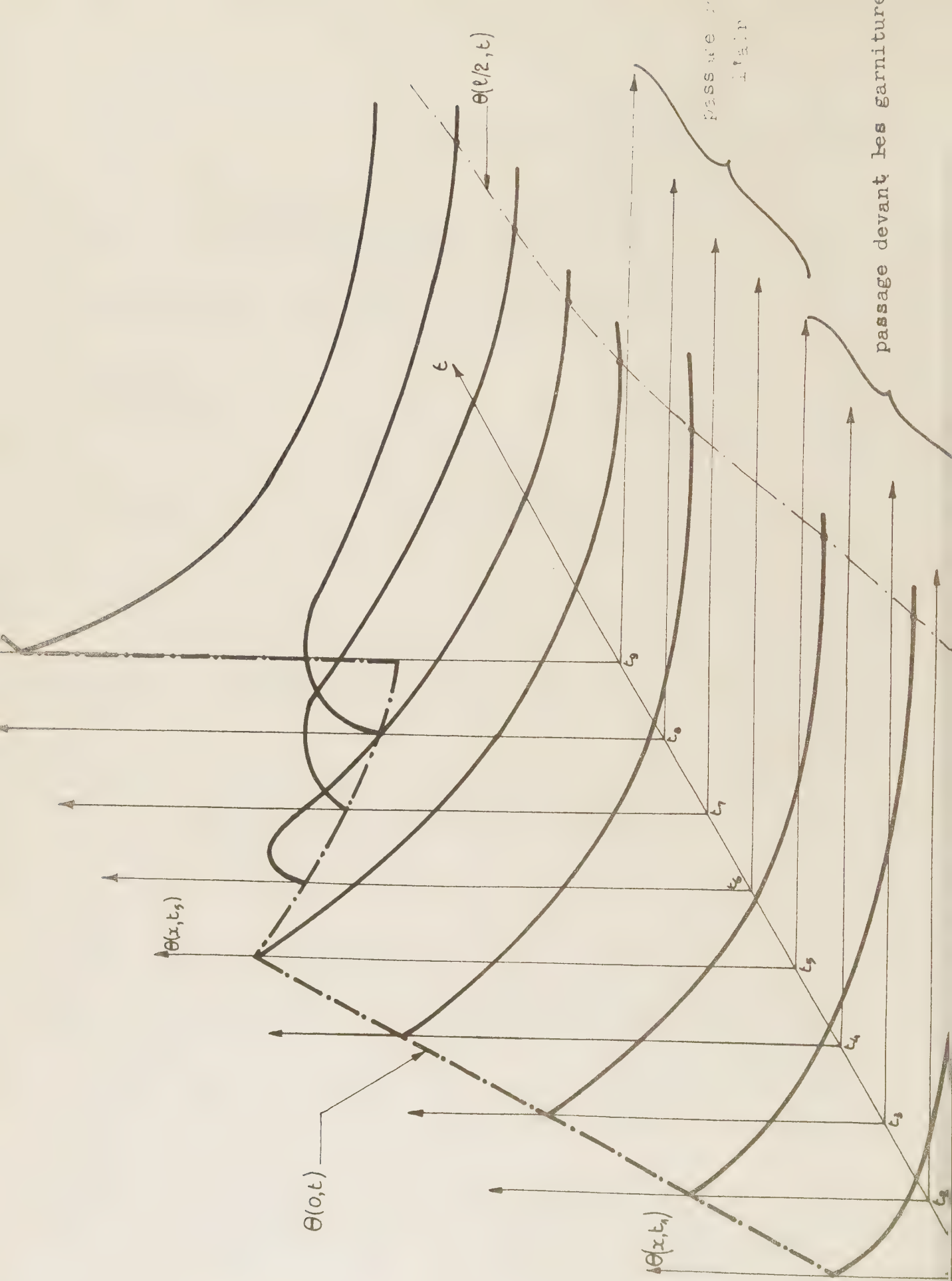
```

Les calculs n'ont pu être faits en une fois pour tout le cycle de freinage en raison de la capacité de la calculatrice utilisée( I.B.M. 1130)

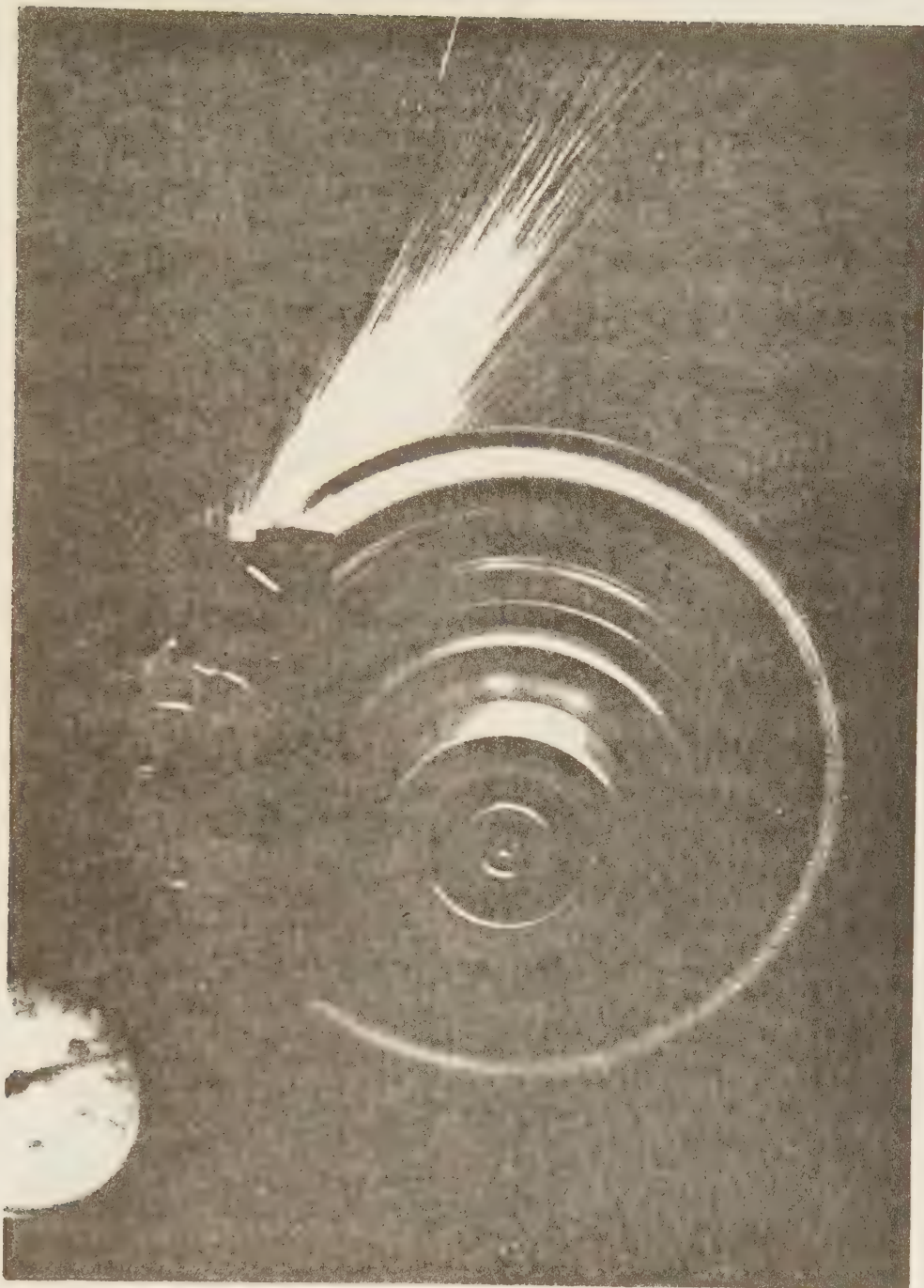
Scindés, les résultats de ce programme ont permis d'établir l'aspect complet des thermogrammes topologiques. Ceux-ci sont reportés sur la figure de la page suivante.

L'abaissement de température en surface dû à l'échange thermique par convection entre le disque et l'air n'est pas négligeable. Les calculs donnent une valeur moyenne de la différence de température de surface entre l'instant où le point du disque quitte les garnitures et celui où ce même point revient en contact avec celles-ci, de l'ordre de 40°C pour une température de surface maximale du disque de 700°C; obtenue lors du freinage d'un véhicule allant à une vitesse initiale de 285 km/h.

Cette baisse de température est très nettement visible sur les photographies obtenues lors des essais à grande vitesse. Ces photographies sont reproduites pages 203 et suivantes.







Vitesse initiale : 2 900 tr/mn

t = 1,5 seconde

Hasselblad F:2,8 ; 1/10 s TRI X Pan

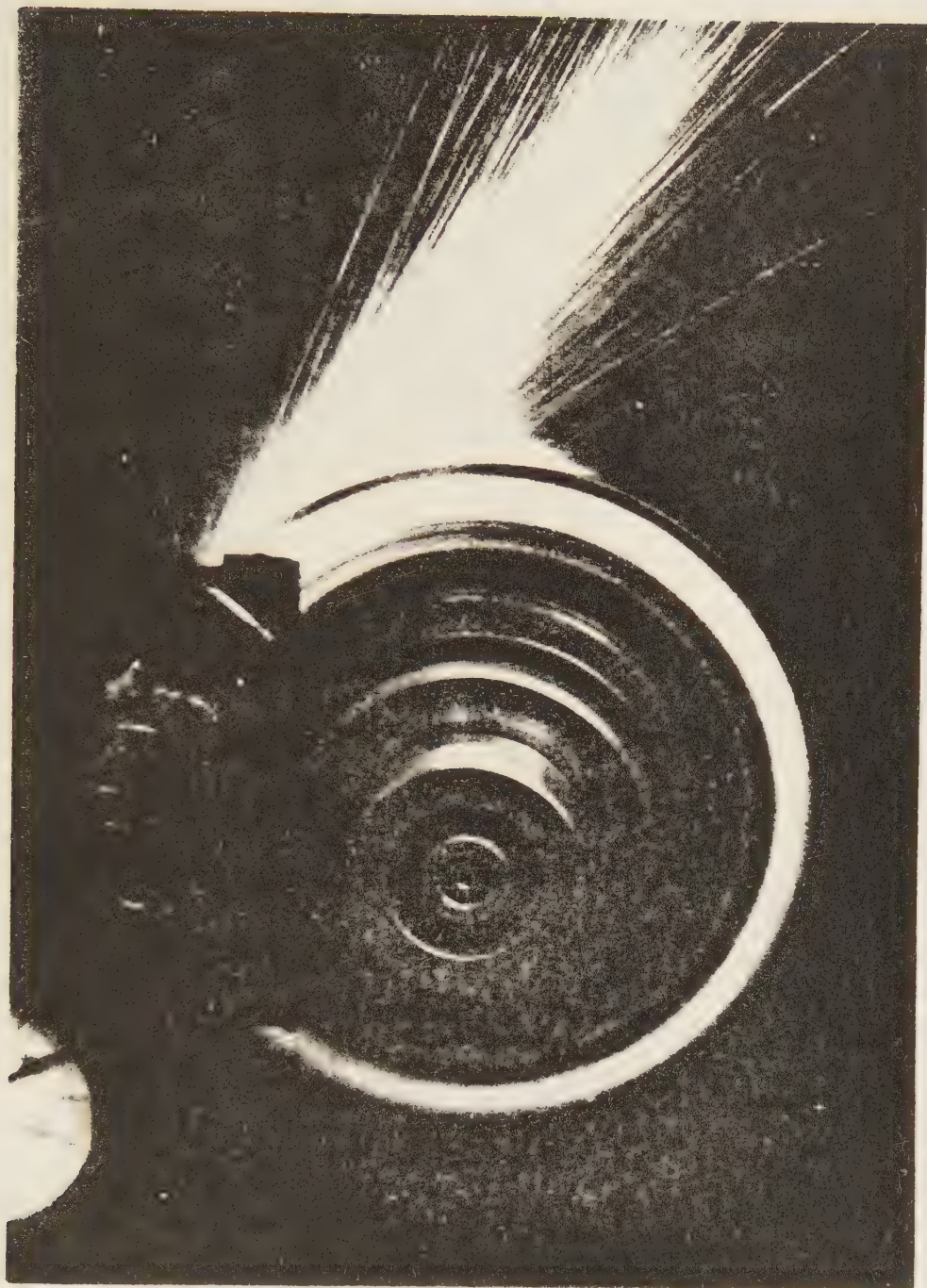






Vitesse initiale : 100 m/s  
100 m/s





Vitesse initiale : 2 900 tr/mn  
t = 4,3 secondes







Vitesse initiale : 1000 tr/min  
0,1 s





**4**

**ESSAIS**  
**ET**  
**MESURES**



# 1

## RAPPEL DES METHODES UTILISABLES

Dans le cas de l'étude des freins à disque, nous nous trouvons limité dans le choix des méthodes de mesures par le fait qu'il s'agit d'un phénomène dynamique.

Nous pouvons utiliser une méthode de mesure par thermocouples, par crayons thermosensibles, et une méthode utilisant l'émission infra-rouge; cette dernière méthode évitant tout contact avec le disque mais ne permettant d'évaluer que les températures de surface.

Le principe de la mesure par thermocouples est rappelé à l'annexe 14.

Le principe de la mesure par infrarouges est rappelé à l'annexe 15.

# 2

## MONTAGE DES THERMOCOUPLES DANS LE DISQUE.

La solution de la prise de températures par l'intermédiaire de thermocouples ayant été retenue, il a fallut faire face aux problèmes de montage.

Plusieurs critères sont à considérer :

- a ) Chercher le diamètre de foret minimum nous permettant, grâce aux séries dites "longues" de percer radialement, de part en part, la couronne de freinage du disque.

- b) Trouver un métal fusible, bon conducteur de la chaleur, afin de transmettre le flux calorifique aux thermocouples 'dynamiques'.

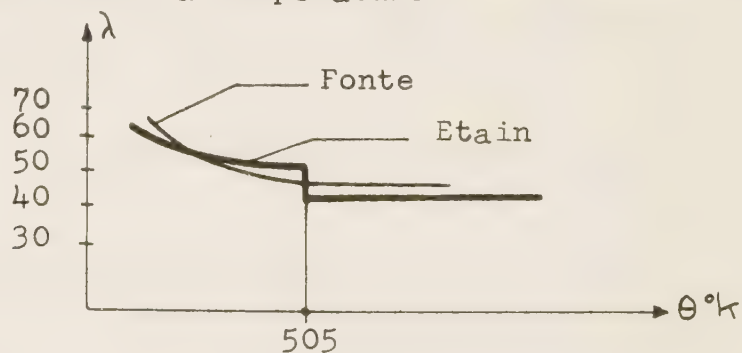
- c) Sortir les informations vers l'extérieur de l'ensemble tournant.

. Le premier point imposa un perçage du disque à l'aide d'un foret de 2 mm de diamètre et de 56 mm de longueur de coupe.

. Pour le second point, l'étain fut retenu pour les raisons suivantes :

- il possède une température de fusion faible : 232 ° C, ce qui facilite son introduction par l'orifice de perçage et ce qui permet d'éviter une oxydation importante du disque par chauffage;

- il possède un coefficient de conductivité thermique sensiblement égal à celui de la fonte<sup>(\*)</sup>; en effet, pour des températures supérieures à 250 ° C l'étain est liquide et, dans ce cas, le coefficient prend la valeur de 45 J/ms°K sensiblement constante avec la température.

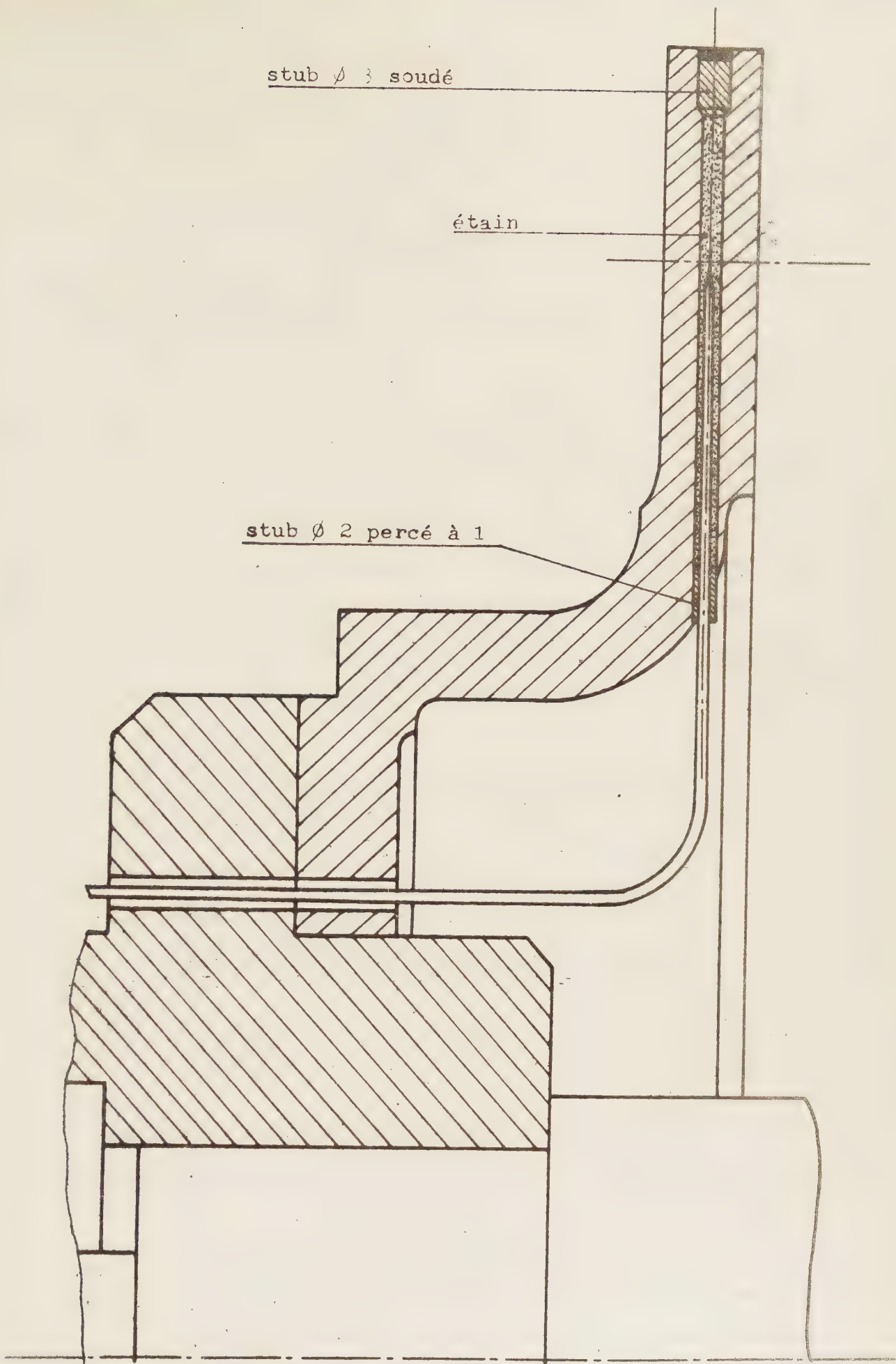


Ceci nous conduit au montage représenté à la page suivante.

stub  $\varnothing$  3 soudé

étain

stub  $\varnothing$  2 percé à 1





(\*) Le coefficient de conductivité thermique de la fonte varie, suivant la composition du métal entre 46 et 69 J/m.s.°K.

### 3

#### ETALONNAGE DES THERMOCOUPLES

Les thermocouples utilisés sont des "Pyroténax" de dénomination 1 NI.

Ce sont des couples chromel-alumel de diamètre 1 mm rétreints à leur extrémité à un diamètre de 0,25 mm.

Ce rétreint a pour but de donner au thermocouple un temps de réponse très court. Dans le cas d'un rétreint de 0,25 mm, le temps de réponse est de l'ordre de quelques millisecondes alors que le temps de réponse d'un thermocouple de 1 mm est de l'ordre de quelques dixièmes de seconde.

Thermocouple 1 NI rétreint à 0,25 mm

Type : chromel -alumel

Résistance du couple en  $\Omega/m$  à 20°C : 31

Tensions délivrées par les thermocouples chromel-alumel  
en mV, soudure froide à 0°C :

| Degrés C | 0    | 100  | 200   | 400   | 600   | 800   | 1 000 |
|----------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0        | 0    | 4.1  | 8.13  | 16.39 | 24.90 | 33.31 | 41.31 |
| 50       | 2.02 | 6.14 | 10.15 | 18.50 | 27.03 | 35.35 | 43.24 |

Un essai de réception des thermocouples a été effectué afin de vérifier la tension délivrée à 100°C, point d'ébullition de l'eau distillée.

Le résultat est tracé page 226.

Nous pouvons vérifier que le résultat obtenu correspond aux valeurs fournies par les références du fabricant.

### 3.2

#### Montage du thermocouple de plaquette.

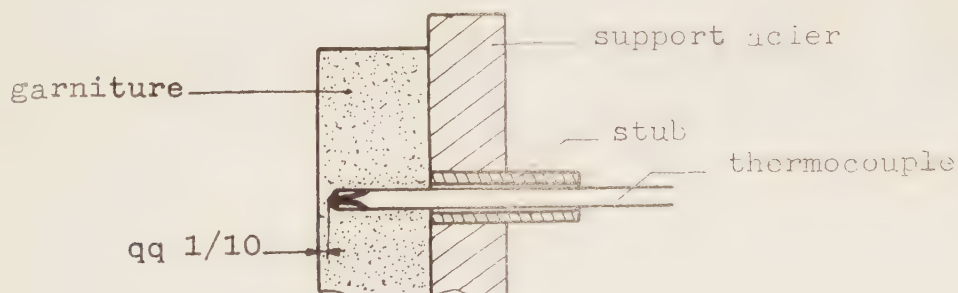
Afin de recueillir une température voisine de celle atteinte par la surface du disque au cours du freinage, nous ne pouvons placer le thermocouple que dans l'une des plaquettes de frein. Plusieurs précautions sont nécessaires pour approcher au mieux la grandeur recherchée.

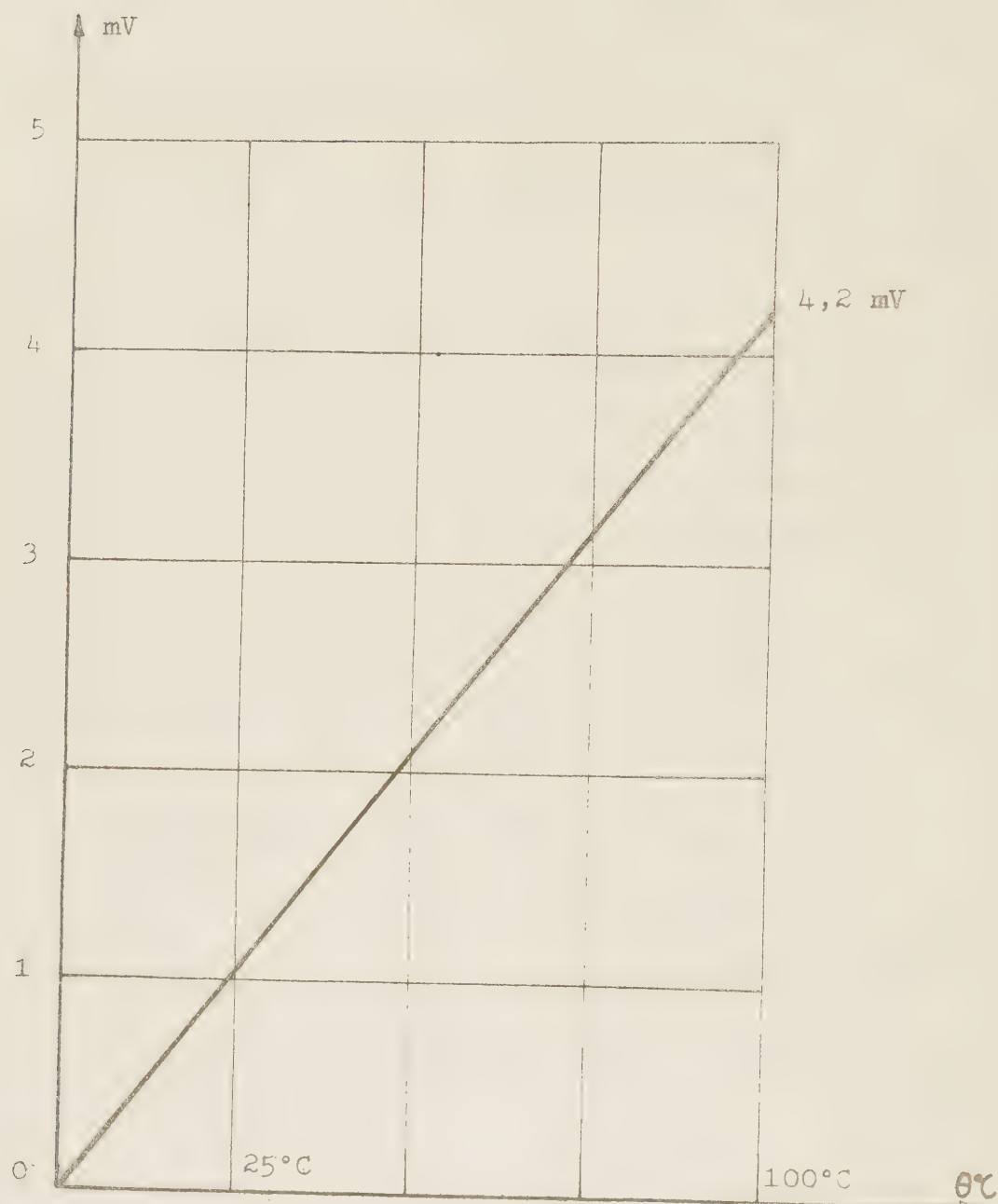
a) Placer la pointe du thermocouple le plus près possible de la surface de frottement sans qu'il y ait contact avec la surface en mouvement.

b) Eviter l'existence d'une masse d'air entre la pointe du thermocouple et la masse de garniture transmettrice du flux calorifique.

c) Tenir compte de l'usure des garniture au cours des freinages.

La solution suivante fut retenue :





Etalonnage des thermocouples "Pyrotenax" ,  $\varnothing$  1 mm  
rétreints à 0,25 mm , chromel-alumel

Soudure froide à 0°C

### 33 Sortie des informations

#### a) Contacteur tournant.

Les tensions délivrées par les thermocouples dynamiques sont transmises par un collecteur tournant dont les caractéristiques sont les suivantes :

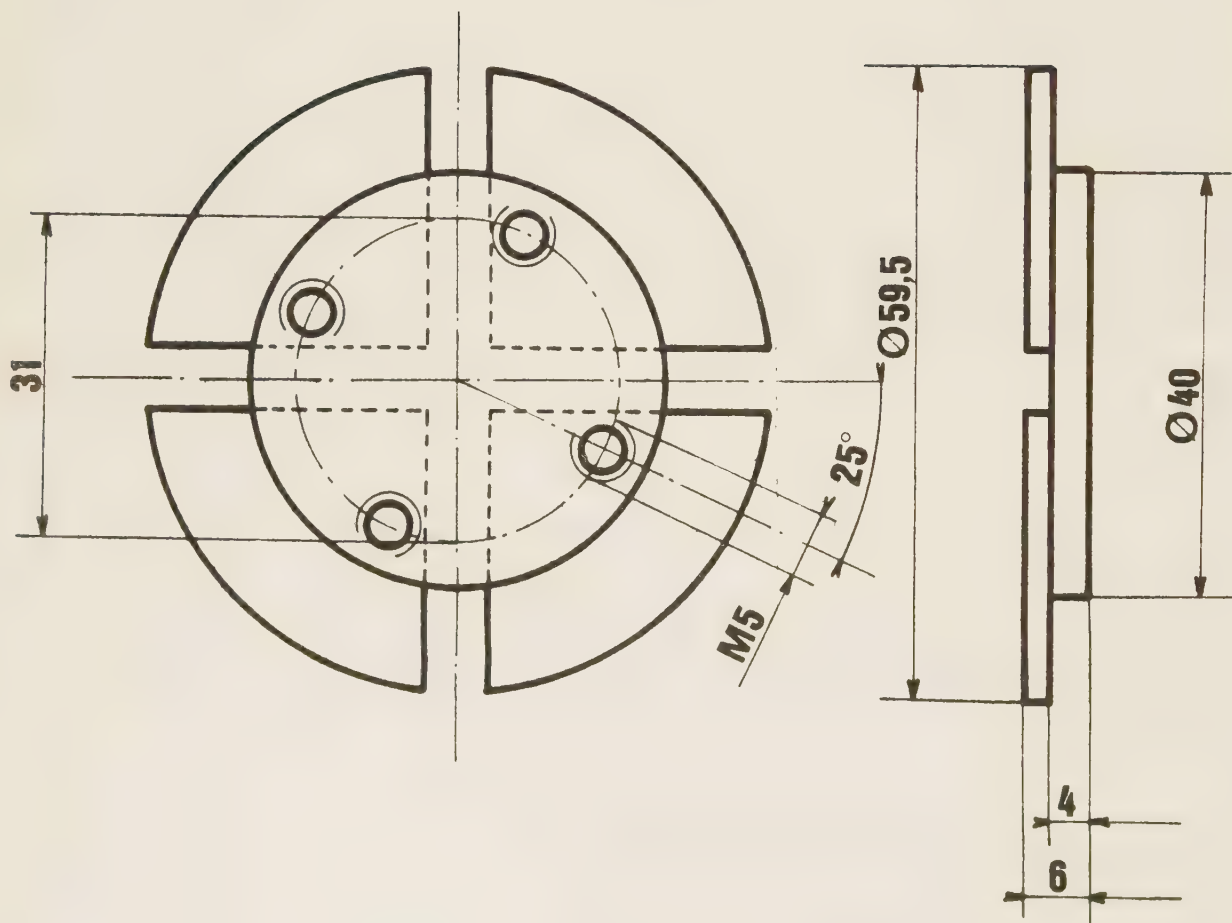
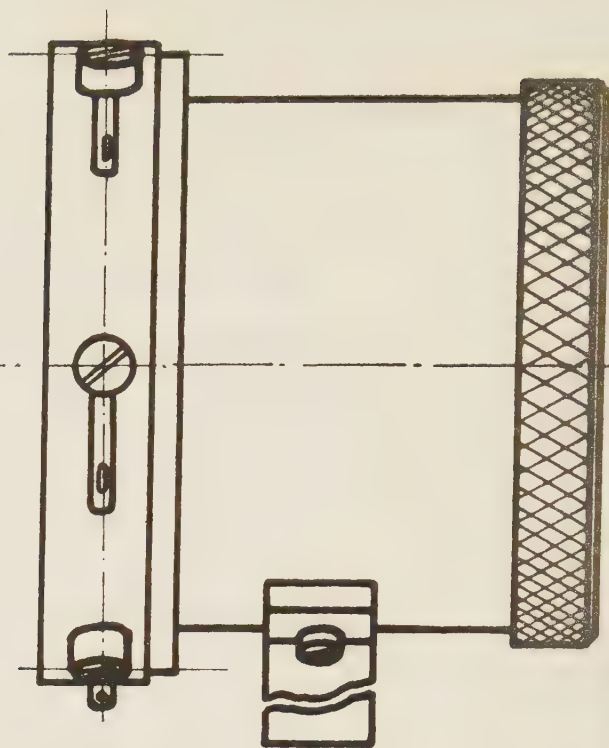
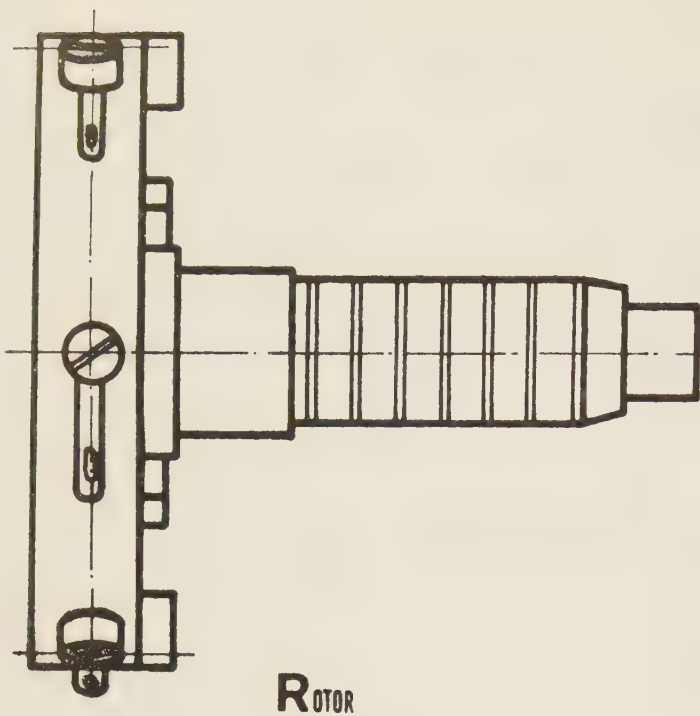
- collecteur tournant HBM type SK 6
- . Résistance de contact.....100m $\Omega$
- . Variation de la résistance de contact..... 2m $\Omega$
- . Tension thermo-électrique entre deux bagues, les balais correspondants étant en court circuit.. 0,05mV
- . Vitesse maximale en fonctionnement permanent 6 000tr/mn
- . Vitesse maximale admissible en courte durée12 000tr/mn

L'appareil peut transmettre des tensions allant jusqu'à 60 V avec une intensité de 2 A. Une utilisation fréquente de cet appareil est la mesure extensométrique. Il est donc capable de transmettre des tensions relativement faibles et son emploi peut convenir pour le type d'informations que nous avons à recueillir.

L'appareil est constitué d'un stator supportant des balais en graphite argenté et d'un rotor dont sont solidaires six bagues (voir détails des pièces et schéma de montage pages suivantes)

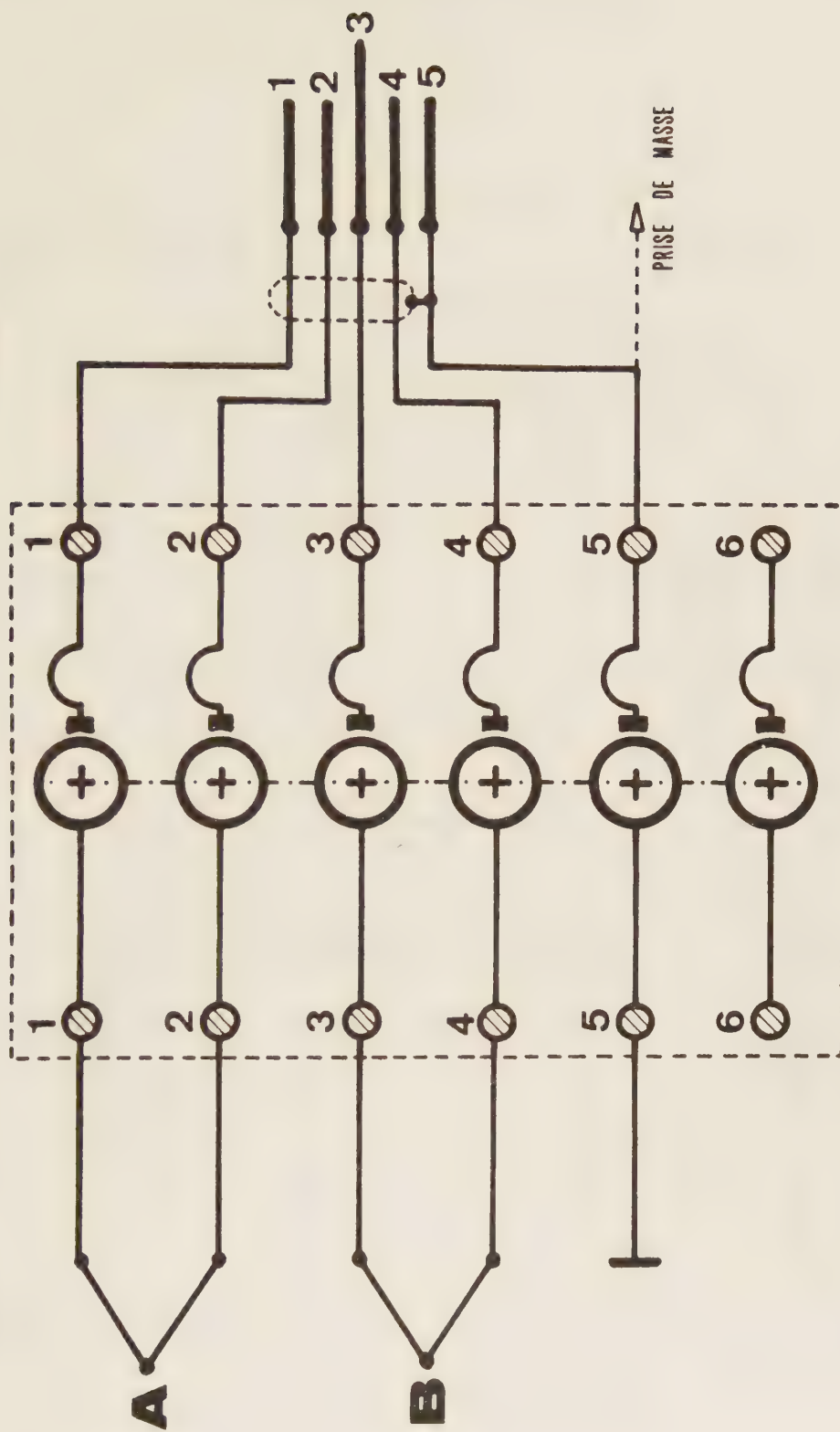
#### b) Galvanomètre enregistreur.

L'appareil retenu pour une première série d'essais fut

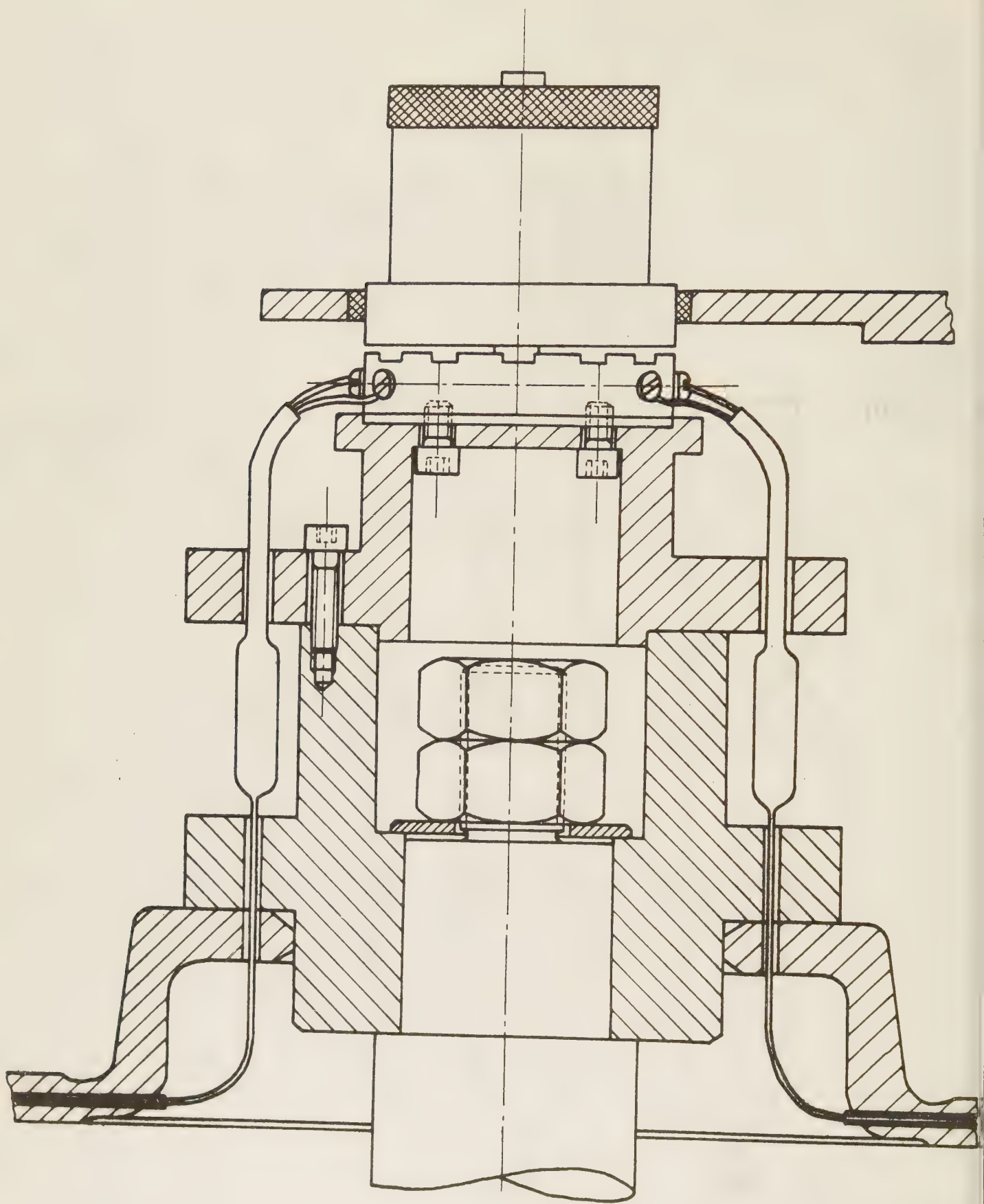


Rotar

Stator







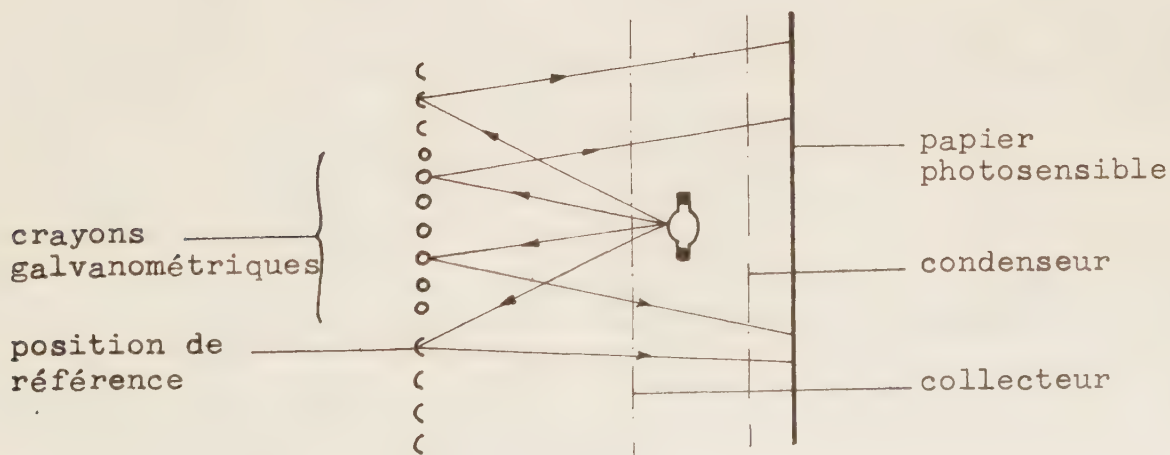
choisi en fonction de la fréquence du signal d'entrée qu'il pouvait admettre. Le passage des thermocouples internes au disque devant les garnitures étant cyclique, il parut intéressant de chercher à déceler les échelons de température reçus à chaque passage devant les plaquettes, afin de mettre en évidence le phénomène de convection durant le passage dans l'air. La vitesse simulée maximale étant de 285 km/h cela nous conduit à capter des fréquences de l'ordre de 100 Hz.

L'appareil est du type galvanomètre à crayons optiques Honeywell Visicorder 1706 dont les caractéristiques sont les suivantes :

- . fréquences admissibles..... jusqu'à 5 000 cycles/s
- . vitesse de déplacement du spot...  $> 75$  cm/s
- . vitesse de défilement du papier.... 6 à 800 mm/s

Principe :

Un faisceau de lumière ultra violette est réfléchi par des miroirs portés par les crayons galvanométriques.



Les rotations des crayons sont enregistrées sur un papier photosensible qui se révèle à l'air libre.

Afin de satisfaire aux conditions d'amortissement et d'adaptation désirées, un adaptateur d'impédance est nécessaire.

### 3.4 Détermination des gammes de sensibilité choisie.

Le galvanomètre utilisé possède deux gammes de crayons de fréquences propres 160 Hz et 500 Hz.

Nous avons choisi les crayons de fréquence propre 160 Hz puisqu'ils nous permettent, en raison des faibles tensions délivrées par les thermocouples d'obtenir une déviation maximale des spots. En effet, les caractéristiques sont les suivantes :

| type crayon                     | fréquence propre $F_0$ | gamme de fréquence | résistance d'amortissement | résistance galvanomètre |
|---------------------------------|------------------------|--------------------|----------------------------|-------------------------|
| Amortissement électromagnétique |                        |                    |                            |                         |
| BB 160A                         | 160                    | 0-100              | 250 $\Omega$               | 80 $\Omega$             |
| BB 500A                         | 500                    | 0-300              | 250 $\Omega$               | 120 $\Omega$            |

|          | sensibilité en courant<br>bras optique<br>20 cm | sensibilité en tension<br>bras optique<br>20 cm |
|----------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| BB 160 A | 9,7 A/cm                                        | 0,8 mV/cm                                       |
| BB 500 A | 51 A/cm                                         | 10 mV/cm                                        |

Les thermocouples chromel-alumel utilisés délivrent une tension de l'ordre de 50 mV pour leur gamme d'utilisation maximale. Le papier photo-sensible de l'enregistreur possède une largeur de 12 cm.

Nous choisirons une largeur utile de 100 mm pour les déplacements du spot.

### 35 Choix des gammes de mesure

Un premier essai et une estimation fondée sur les essais effectués précédemment permettent de penser que la température de surface atteinte au cours d'un freinage à 285 km par heure sera située dans une plage 500-800°C (cette plage correspond aux valeurs données par les calculs et sa largeur provient de l'influence de l'épaisseur du disque et du temps total de freinage sur la température de surface)

Pour la température interne, la plage est comprise entre 0 et 500°C durant le temps de freinage.

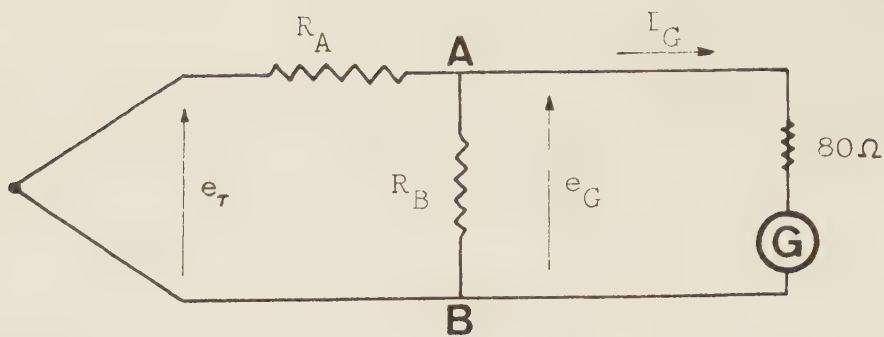
D'où les gammes :

|           |            |
|-----------|------------|
| 0 - 100°C | 0 - 500°C  |
| 0 - 200°C | 0 - 700°C  |
| 0 - 300°C | 0 - 800°C  |
|           | 0 - 1000°C |

### 36 Adaptation :

Pour la déviation maximale du spot choisie, la tension mesurée sera de :

$$0,800 \times 10 = 8 \text{ mV}$$



Le choix de  $R_A$  et  $R_B$ , pour chaque gamme, devra être établi suivant deux critères :

1. Respecter au maximum la résistance d'amortissement de l'appareil de valeur  $R_d = 250 \Omega$ .

$R_d$  est la résistance entre les bornes A et B vue du galvanomètre.

2. Obtenir une déviation de 100 mm pour la température maximale de la gamme choisie.

#### GAMME 0 - 100°C

Pour 100°C, la tension délivrée par un thermocouple chromel alumel est  $e_T = 4,1 \text{ mV}$

$$\frac{e_T}{e_G} = 0,5$$

Cette valeur implique que  $R_A = 0$  la tension délivrée par le thermocouple étant trop faible.

Nous prendrons  $R_B = 82 \Omega$  afin de ramener la résistance du galvanomètre à  $40 \Omega$ .

La résistance  $R_d$  est ici nulle, ce qui entraîne un suramortissement.

#### GAMME 0 - 200°C

Pour 200°C  $e_T = 8,13 \text{ mV}$  d'où  $e_T / e_G = 1,01$



La tension délivrée par le thermocouple étant sensiblement égale à 8 mV, une attaque directe du galvanomètre a été effectuée.

#### GAMME 0 - 300°C

Pour 300°C  $e_r = 12,21$  mV d'où  $e_r / e_G = 1,53$

Si nous appelons  $R_E$  l'ensemble équivalent  $R_B$  en parallèle avec les 80Ω du galvanomètre, nous avons :

$$(R_E + R_A) / R_E = e_r / e_G = 1,53$$

Pour  $R_B = 820\Omega$  nous avons  $R_E = 73\Omega$  et  $R_A = 38\Omega$

La valeur de la résistance d'amortissement est

$$R_d = 38\Omega$$

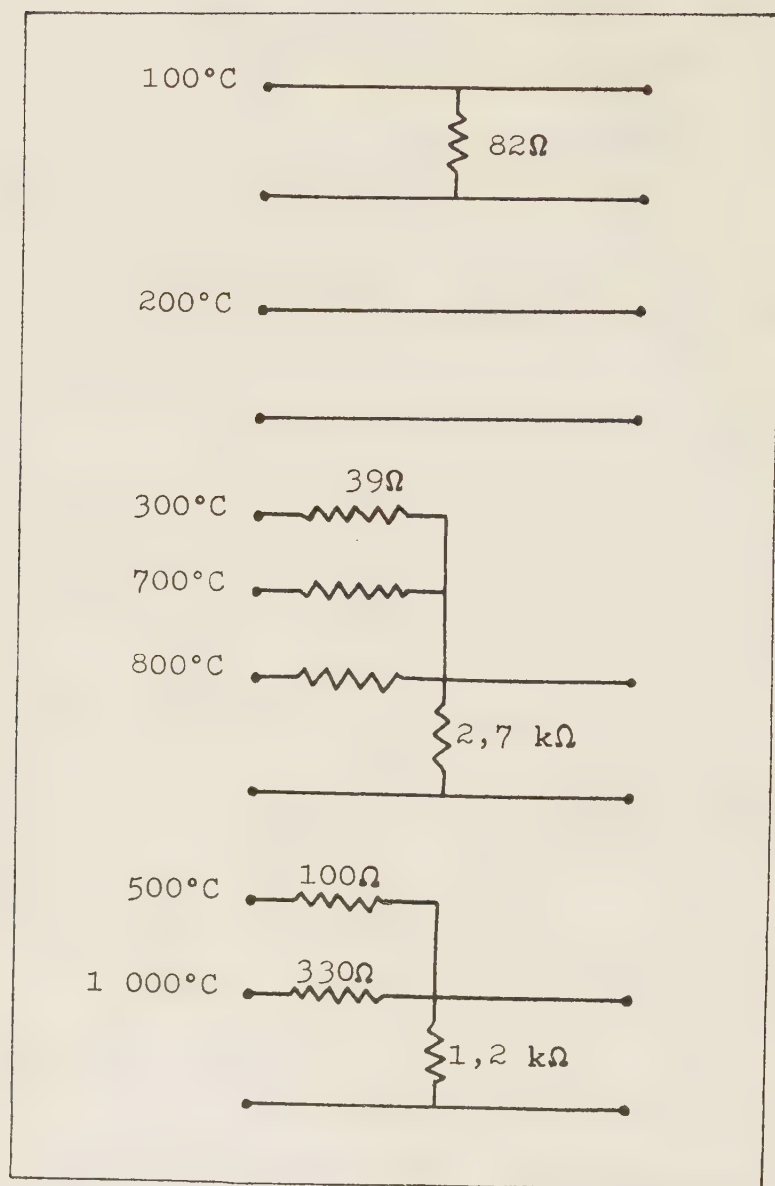
Il est à remarquer que même en choisissant une résistance  $R_B$  très grande, il n'est pas possible de satisfaire à la condition d'amortissement  $R_d = 250\Omega$ .

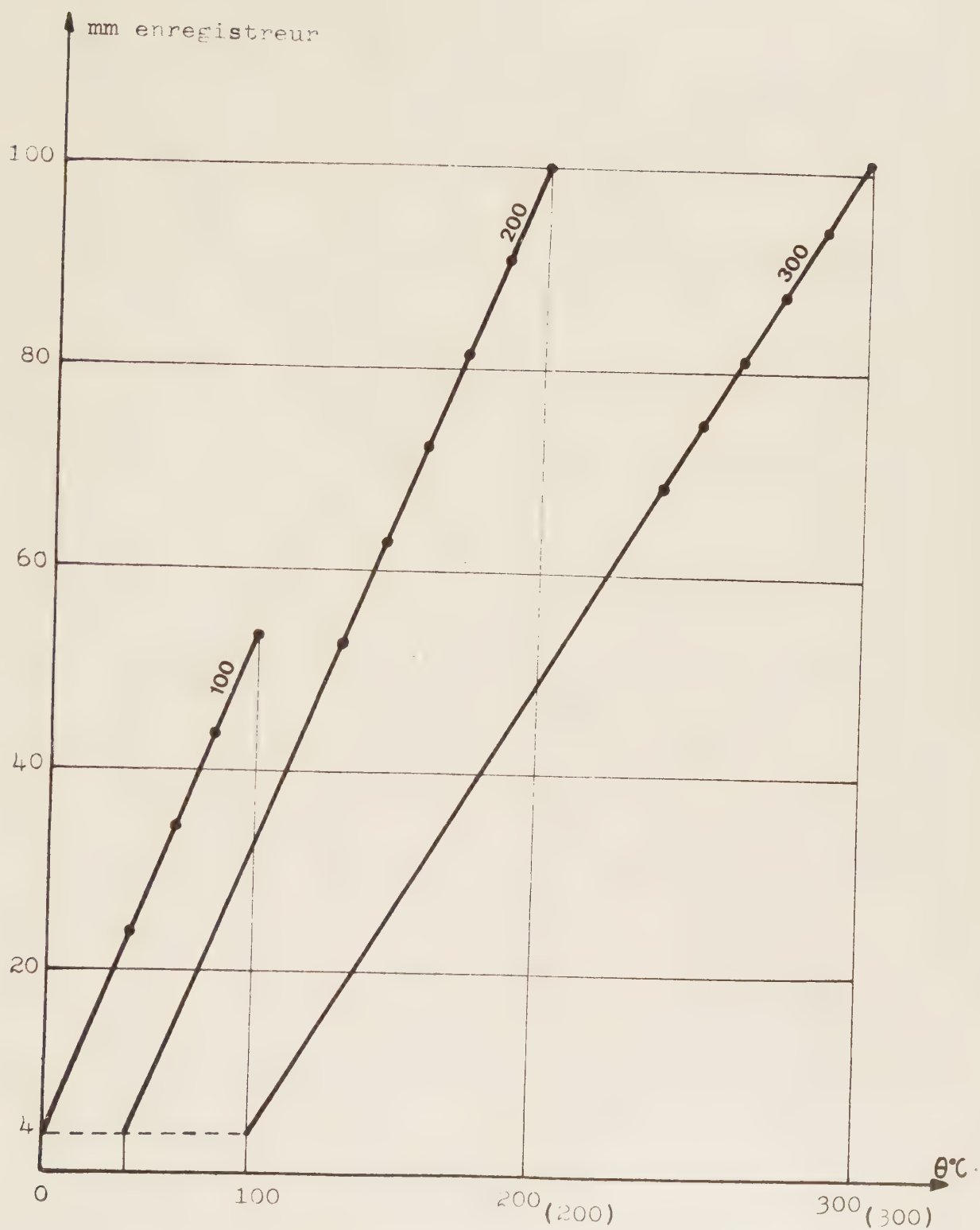
Pour les autres gammes nous agirons de la même manière ce qui nous donne les valeurs

| Gammes  | $R_A$ | $R_B$ | $R_d$ | Gammes    | $R_A$ | $R_B$  | $R_d$ |
|---------|-------|-------|-------|-----------|-------|--------|-------|
| 0 - 100 | 0     | 82Ω   | 0     | 0 - 700   | 220Ω  | 2,7 kΩ | 200   |
| 0 - 200 | 0     | 0     | 0     | 0 - 800   | 270Ω  | 2,7 kΩ | 225   |
| 0 - 300 | 39Ω   | 820Ω  | 38Ω   | 0 - 1 000 | 330Ω  | 1,2 kΩ | 248   |
| 0 - 500 | 100Ω  | 1,2kΩ | 90Ω   |           |       |        |       |

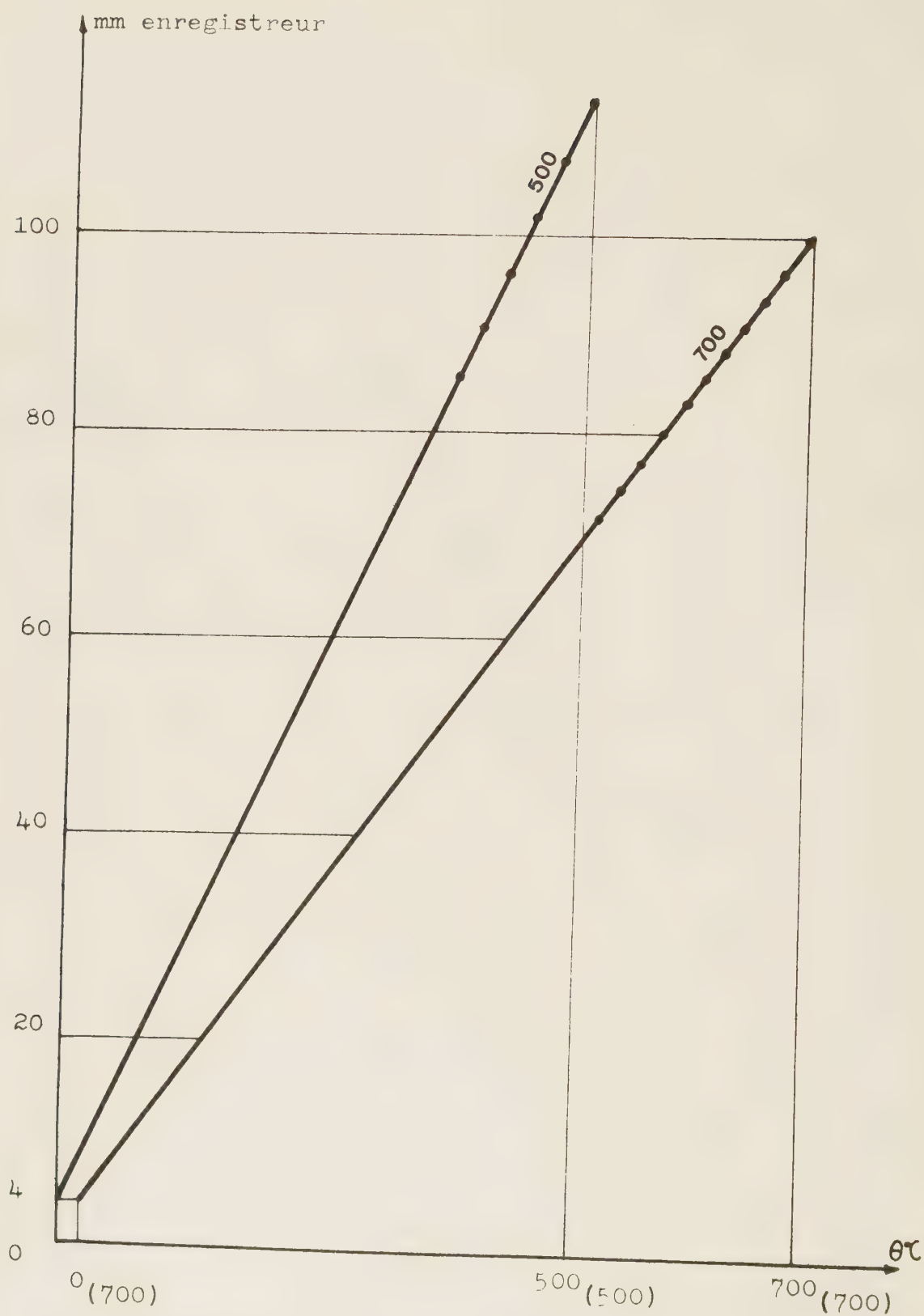
d'où le montage :



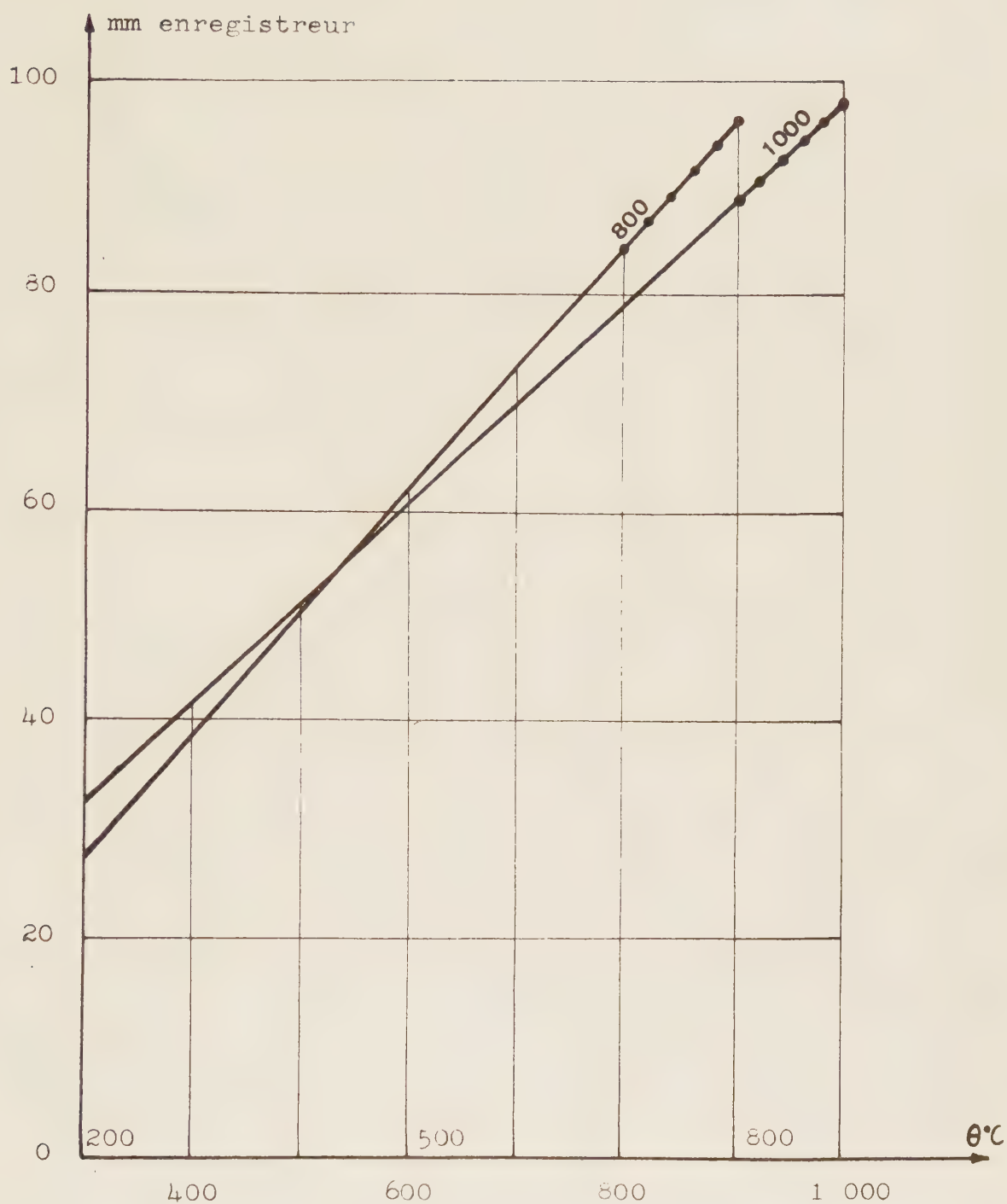




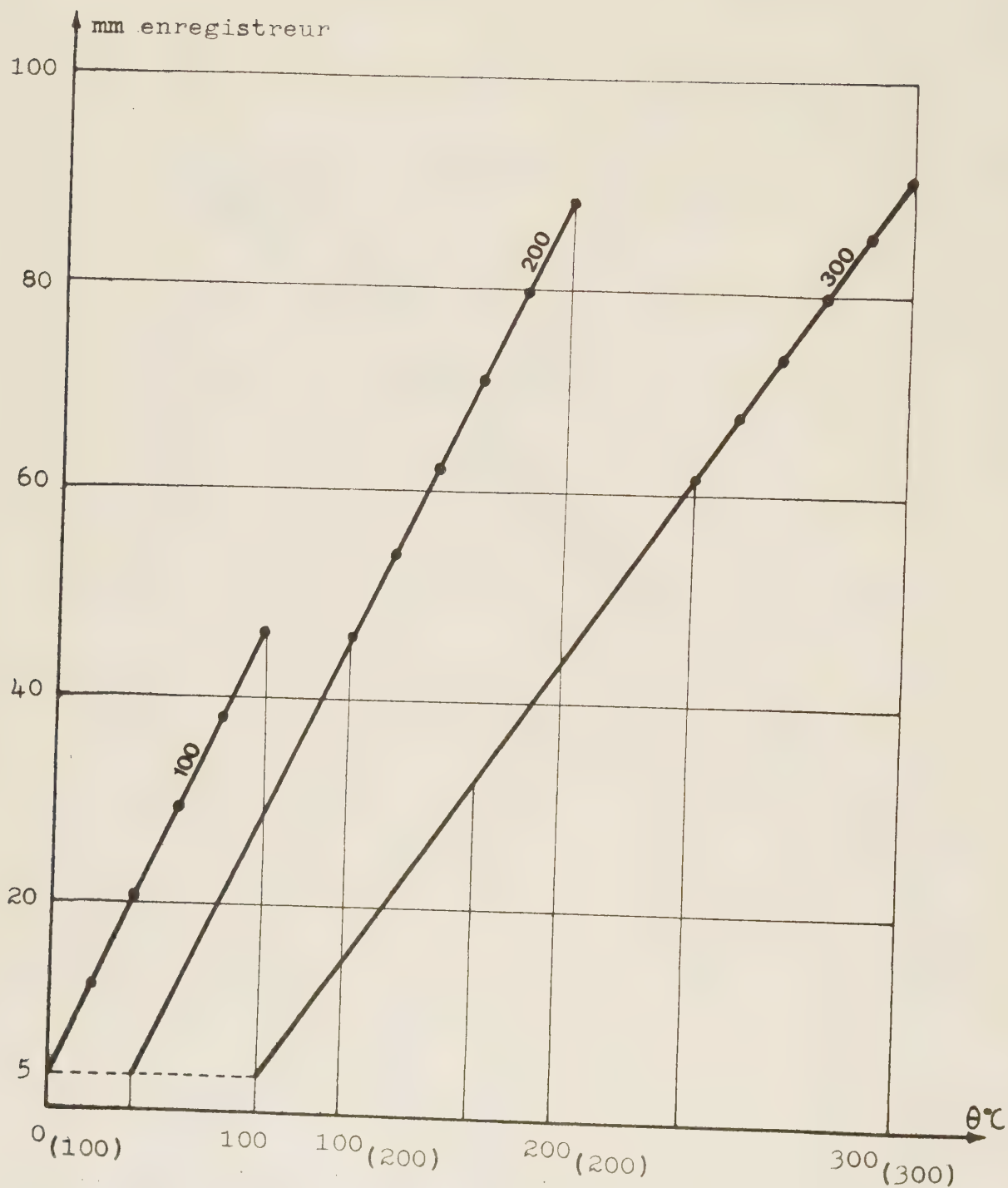
CANAL 5



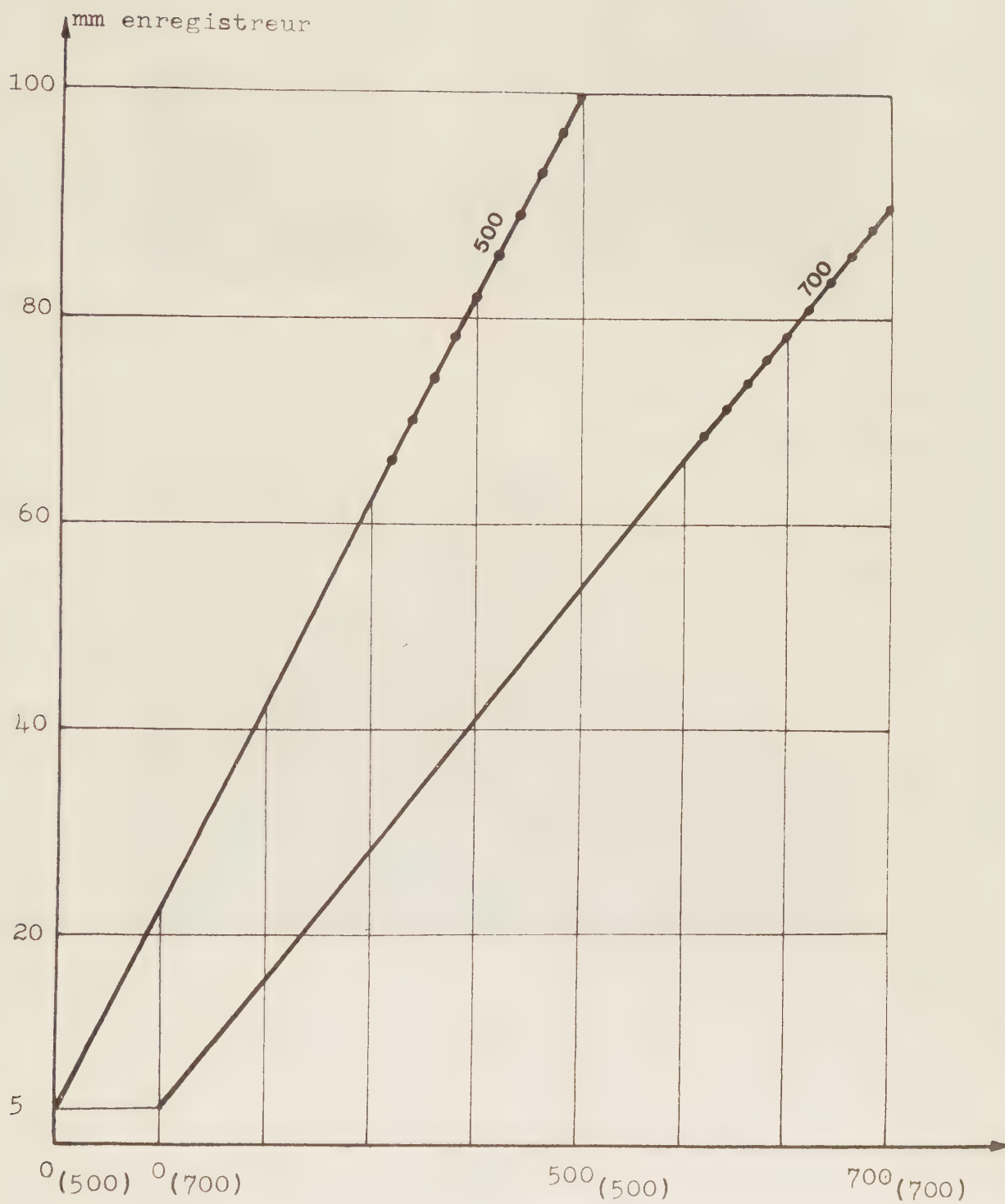
CANAL 5



CANAL 5



CANAL 6



CANAL 6



Au niveau de l'appareil de mesure Honeywell, il n'a pas été possible de filtrer la fréquence de 50 Hz à l'arrivée des crayons optiques aussi les phénomènes cycliques n'ont ils pas pu être analysés.

Lors d'essais à 1 000 tr/mn, (simulation d'un véhicule allant à une vitesse proche de 100 km/h), les thermocouples placés dans le disque ont donné un signal très faible à partir de  $t = 5$  secondes, c'est à dire après l'arrêt complet du disque qui eu lieu 3 secondes après le début du coup de frein. Compte tenu des vibrations dues à la fréquence du réseau, il n'a pas été possible de chiffrer l'amplitude de ce signal.

Par contre le thermocouple placé dans une plaquette a délivré un signal lisible et chiffrable. La courbe obtenue est tracée à la page suivante.

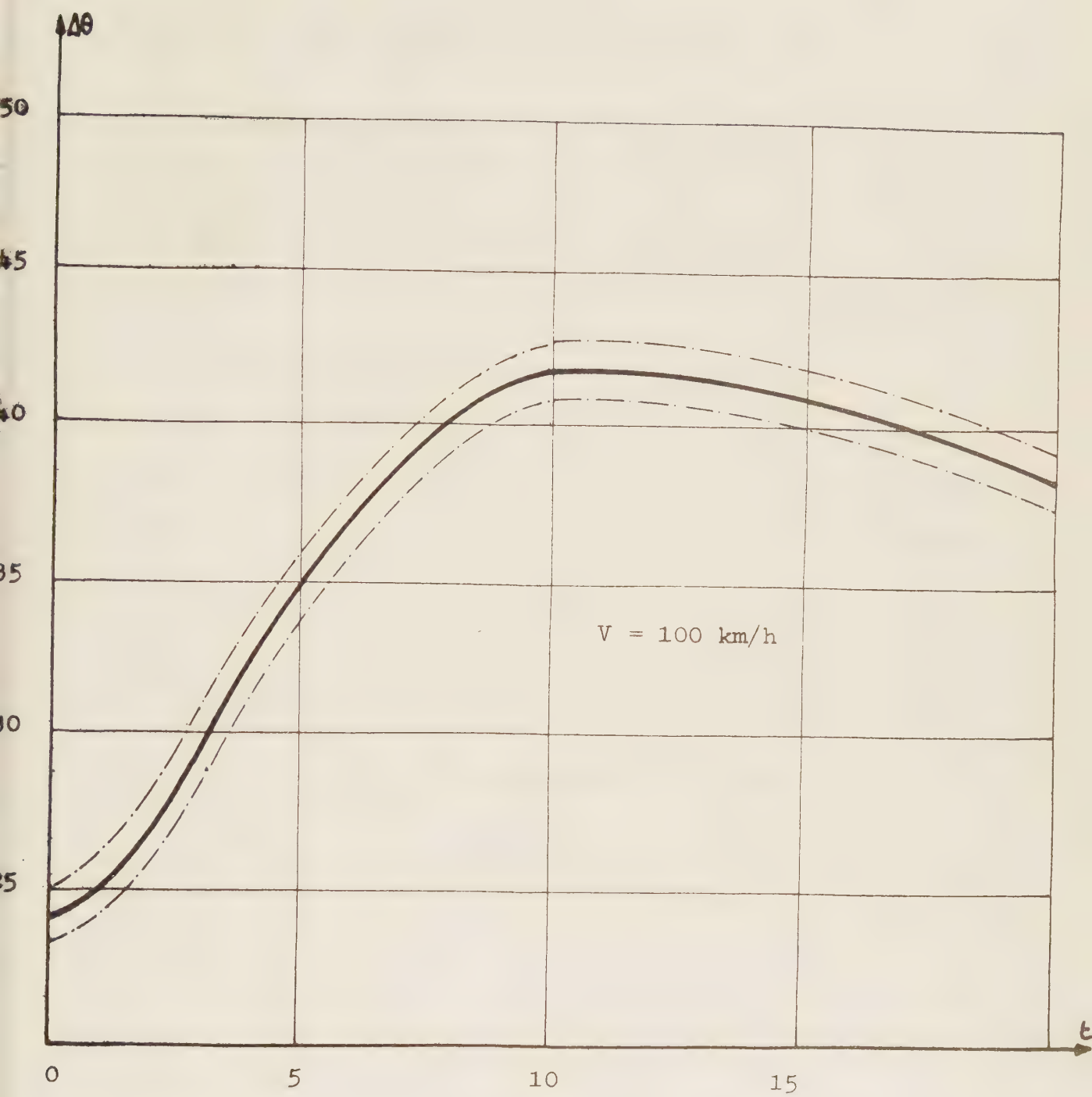
Afin d'obtenir un signal chiffrable délivré par les thermocouples placés dans le disque, un essai a été fait à 2 900 tr/mn (simulation d'un véhicule allant à 285 km/h) . Cet essai, au cours duquel l'ensemble tournant devait être arrêté en 8,5 secondes, a provoqué une fissuration très marquée du disque au droit des perçages servant au positionnement des thermocouples . Les fissures partent du milieu de la bande de frottement et vont vers le moyeu.

Compte tenu des contraintes thermiques élevées lors d'essais à grande vitesse, il ne semble donc pas possible de



Fissuration du disque au droit  
des thermocouples après l'essai  
à 2 900 tr/min.





"noyer" des thermocouples dans la couronne de frottement sans craindre une fissuration sinon un éclatement du disque.

## 5 DISQUE ESSAYE lors du second programme d'essais

Le disque utilisé est un disque de Renault R 16 d'une épaisseur de 9 mm au niveau de la couronne de frottement.

Calculons les températures de surface de contact pour les vitesses de 100, 200 et 285 km/h.

Le nombre de Fourier pour ces valeurs est :

$$-100\text{km/h} \quad l^2/4aT = (4,5 \cdot 10^{-3})^2 / 4 \cdot 0,124 \cdot 10^{-4} \cdot 3 = 0,136$$

$$-200\text{km/h} \quad \quad \quad \cdot 6 = 0,0680$$

$$-285\text{km/h} \quad \quad \quad \cdot 8,5 = 0,0480$$

Reportons ces valeurs sur le graphe donnant les écarts relatifs en fonction du nombre de Fourier pour les valeurs du temps  $t = T/2$  et  $t = T$ . Nous obtenons :

|              |             |          |         |
|--------------|-------------|----------|---------|
| V = 100 km/h | écarts en % | t = 1,5  | € = 19  |
|              |             | t = 3    | € = 84  |
| V = 200 km/h |             | t = 3    | € = 45  |
|              |             | t = 6    | € = 154 |
| V = 285 km/h |             | t = 4,25 | € = 73  |
|              |             | t = 8,5  | € = 200 |

l'écart de température entre la surface de contact et le milieu ambiant, en milieu thermique limité est :

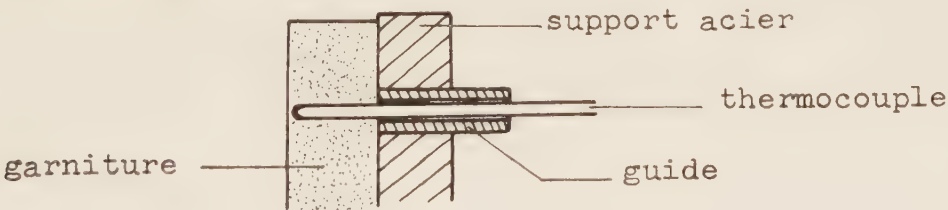
$$\Delta\theta_s = \Delta\theta (1 + \epsilon)$$

|                            | V = 100 km/h |    | V = 200 km/h |     | V = 285 km/h |     |
|----------------------------|--------------|----|--------------|-----|--------------|-----|
|                            | 1,5          | 3  | 3            | 6   | 4,25         | 8,5 |
| $\Delta\theta$<br>illim.   | 66           | 47 | 187          | 132 | 316          | 224 |
| $\Delta\theta_s$<br>limité | 78           | 87 | 252          | 335 | 545          | 685 |

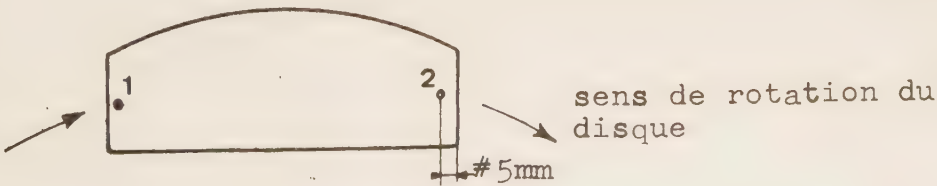
Nous obtenons ainsi les thermogrammes chronologiques des pages suivantes; les courbes en trait fin représentant les températures de surface de contact en supposant le milieu thermique illimité et celles en trait fort les températures de surface de contact en milieu thermique limité.

## 6 SERIES D'ESSAIS pour mesurer les températures dans les GARNITURES.

6.1 Deux thermocouples ont été montés dans une plaquette de la manière suivante :

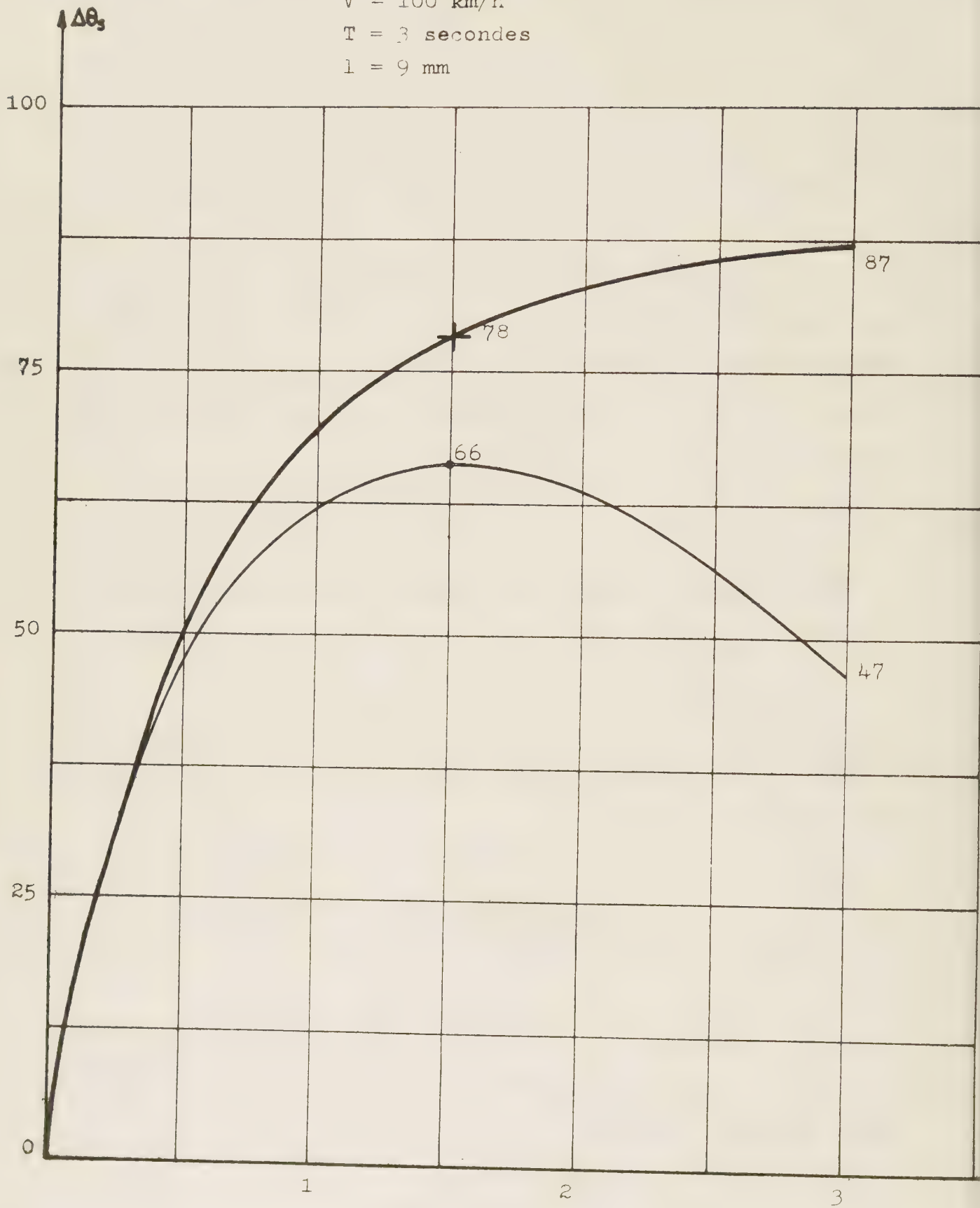


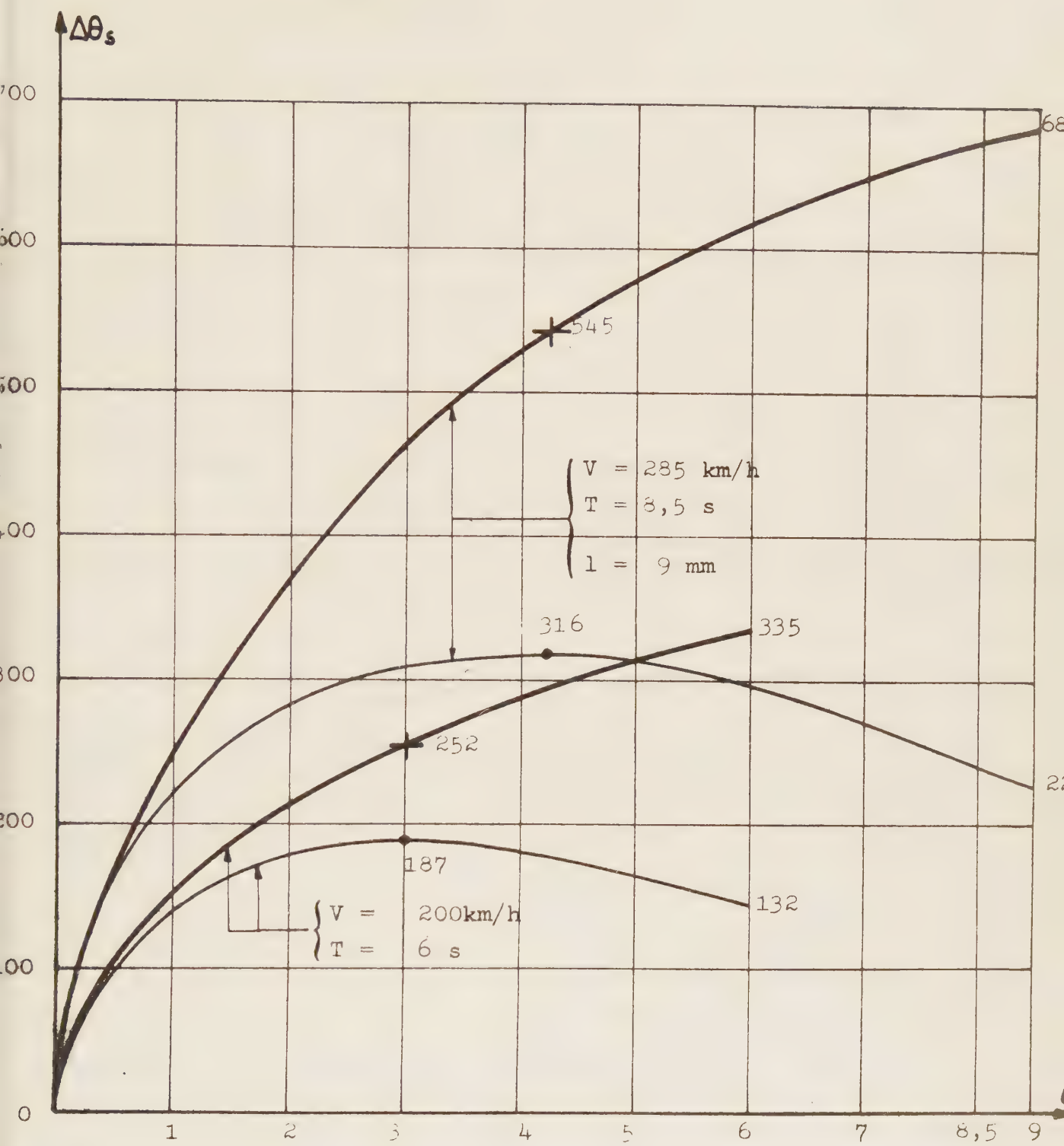
Ces deux thermocouples sont des chromel-alumel de diamètre 1,5 mm et sont reliés à deux millivoltmètres SERVOTRACE munis de table traçante.





$V = 100 \text{ km/h}$   
 $T = 3 \text{ secondes}$   
 $l = 9 \text{ mm}$





Ces deux thermocouples ont un temps de réponse de 0,4 seconde. Les origines des thermogrammes chronologiques ont été choisies de manière à tenir compte de ce retard.

## 6.2 PREMIERE SERIE D'ESSAIS

Le thermocouple (1) se trouve à 0,7 mm de la surface et le thermocouple (2) à 1 mm.

### 621 Premier essai.

La vitesse de rotation est de 1 000 tr/mn (simulation d'un véhicule allant à une vitesse voisine de 100 km/h).

Le temps total de freinage est de 3,6 secondes, soit 0,6 seconde de plus que le temps théorique ayant servi au calcul de  $\Delta\theta$  s .

Le thermogramme obtenu est reporté sur la figure 1.1.

Un décalage d'environ 12°C en moyenne a été enregistré entre la température relevée par le thermocouple (1) et celle du thermocouple (2). La température maximale atteinte en (1) est de 33°C et celle en (2) de 45°C.

La différence entre ces températures et celles calculées provient des faits suivants :

- Le temps total de freinage est plus long que le temps théorique, ce qui entraîne une diminution du flux de chaleur donc de la température.

- Les thermocouples ne sont pas suffisamment rapprochés

essai : 1      série 1

V = 1 000 tr/mn  
T = 3,6 secondes

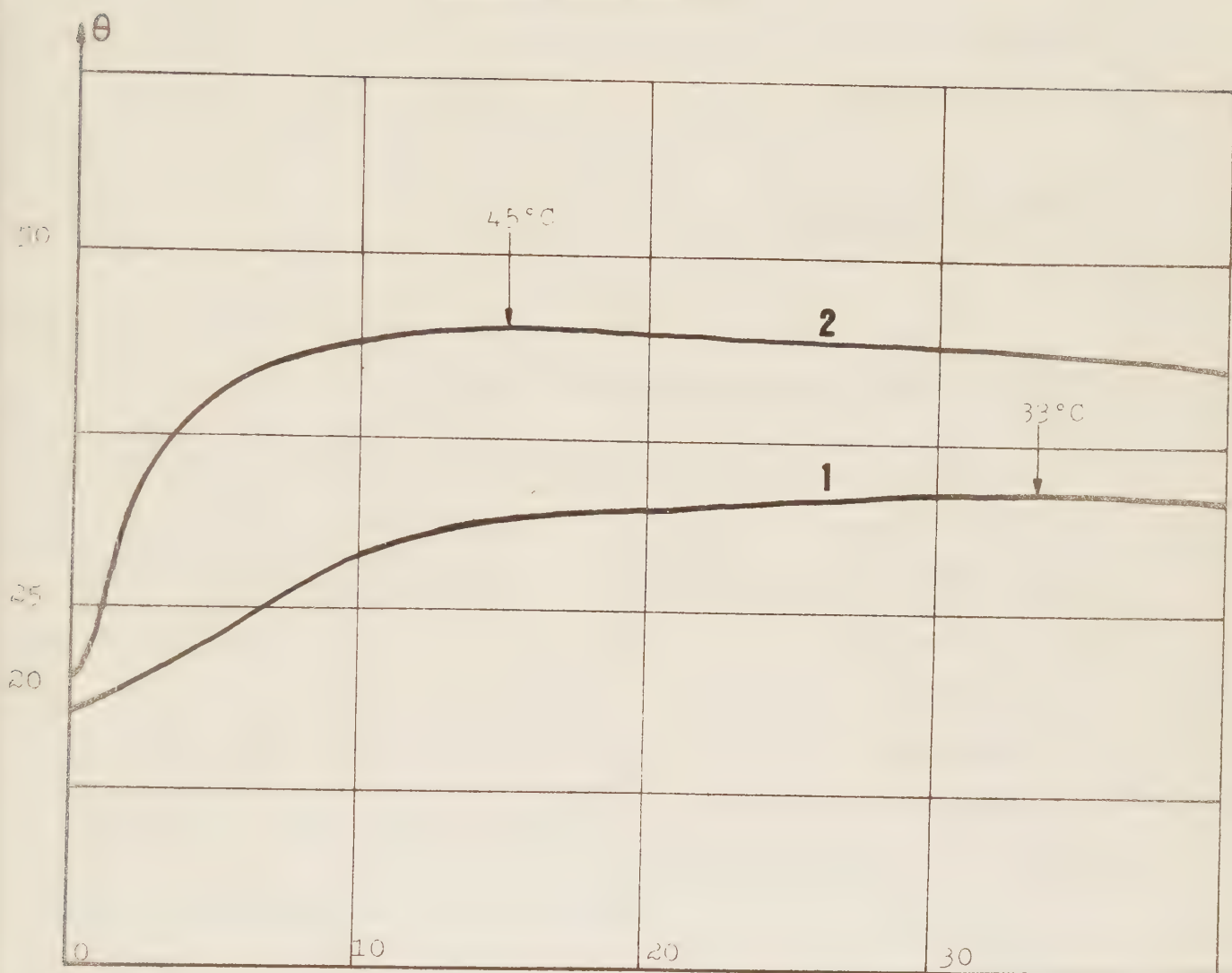


fig 1.1

de la surface de contact ce qui fait que la température enregistrée est plus faible que la température de surface car l'amortissement du signal thermique est important compte tenu que le matériau constitutif des garnitures a un coefficient de conductivité élevé.

La différence entre ces deux enregistrements montre bien que la température du disque s'élève non seulement lors de la reprise du contact avec les garnitures mais durant toute la durée du contact, ceci pour la vitesse initiale considérée.

### **6.2.2**    Deuxième essai.

La vitesse de rotation a été conservée soit 1 000 tr/mn le temps total de freinage est de 3,4 secondes.

Les valeurs enregistrées sont légèrement supérieures aux précédentes. Cela provient principalement du fait que la température initiale n'était pas rigoureusement la même qu'au premier essai mais plus élevée. Les courbes ont subi une translation vers les températures croissantes égale à cet écart entre les températures du disque avant les essais; de plus le temps de freinage a été de 0,2 seconde plus court. La température maximale atteinte est de 48°C. ( fig 1.2 )

### **6.2.3**    Troisième essai.

La vitesse de rotation est de 2 000 tr/mn, ce qui simule un véhicule allant à une vitesse voisine de 200 km/h.

essai : 2      série 1

V = 1 000 tr/mn

T = 3,4 secondes

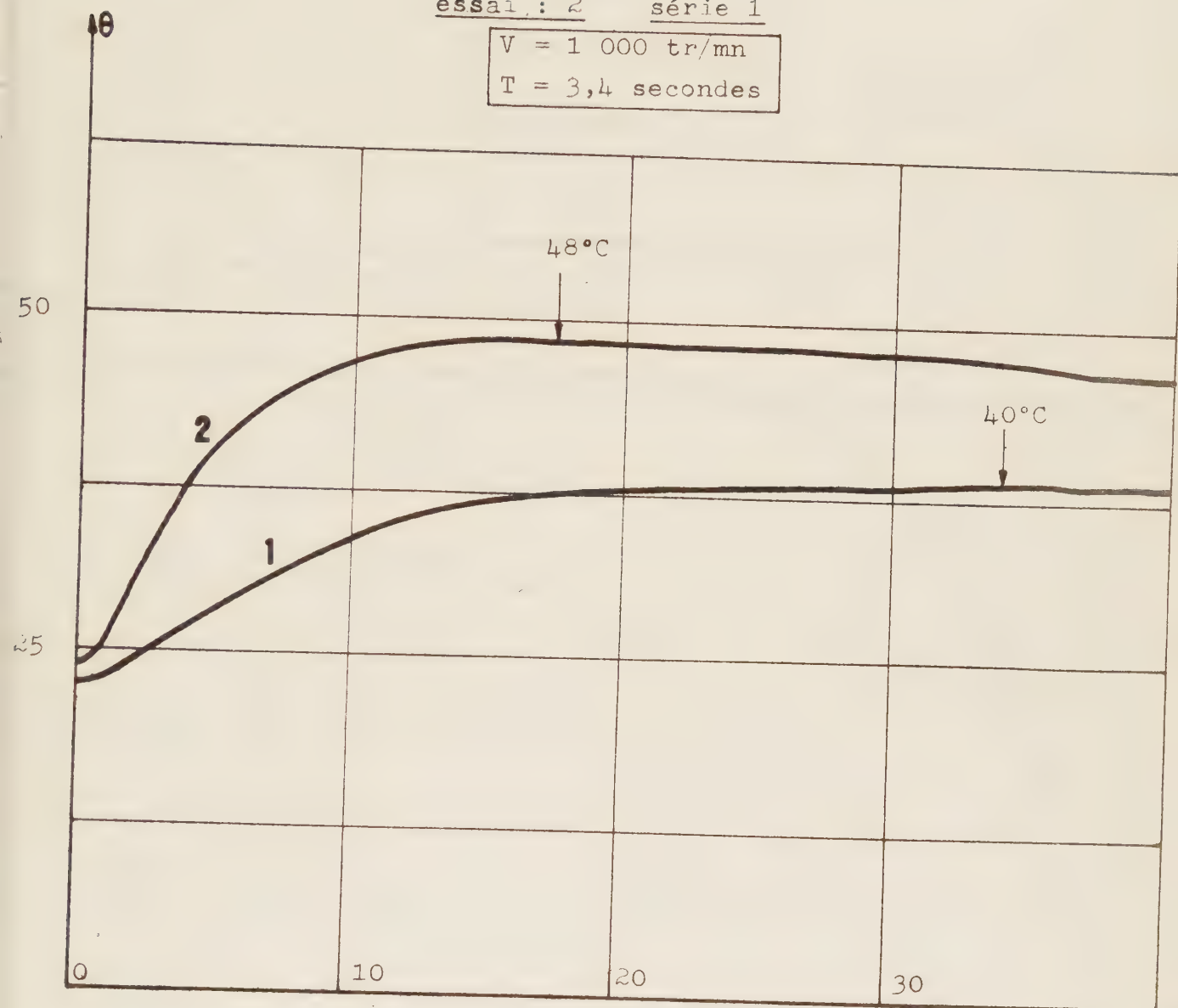


fig 1.2



essai : 3 série 1

V = 2 000 tr/mn

T = 6 secondes

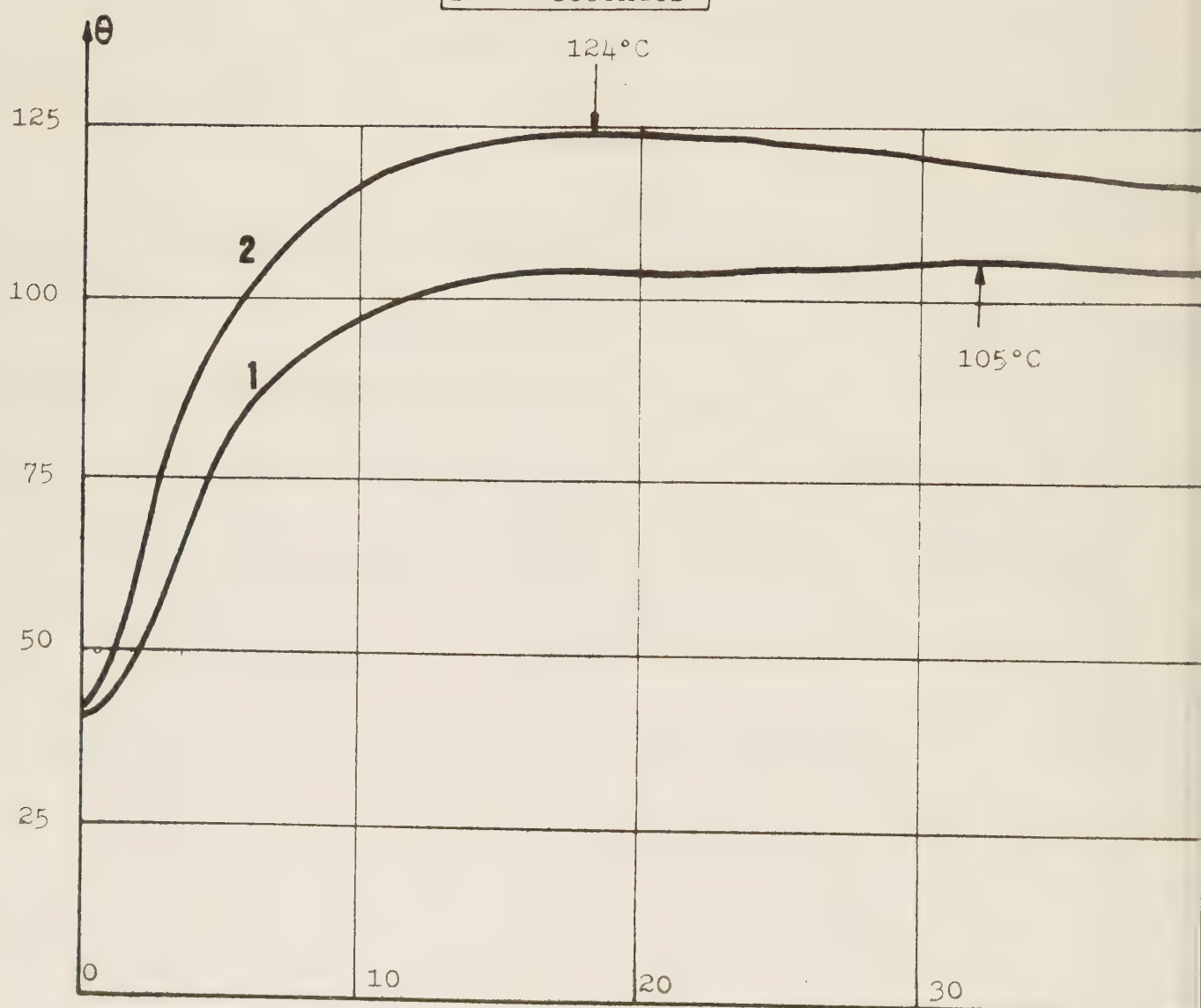


fig 1.3

Le temps total de freinage a été exactement le temps théorique soit 6 secondes.

La valeur maximale de la température enregistrée par le thermocouple (2) est de  $124^{\circ}\text{C}$ , celle enregistrée par (1) de  $105^{\circ}\text{C}$  soit une différence de  $19^{\circ}\text{C}$ .

Le temps de propagation du signal thermique montre bien l'importance du coefficient de conductivité sur l'amortissement de celui-ci. ( fig 1.3 )

### **6.3** DEUXIEME SERIE D'ESSAIS

Les deux thermocouples ont été ramenés à une distance de 0,5 mm de la surface de contact.

#### **6.3.1** Premier essai

La vitesse de rotation est de 1 000 tr/mn et le temps total de freinage de 3,6 secondes soit 0,6 seconde de plus que le temps théorique. ( fig 2.1 )

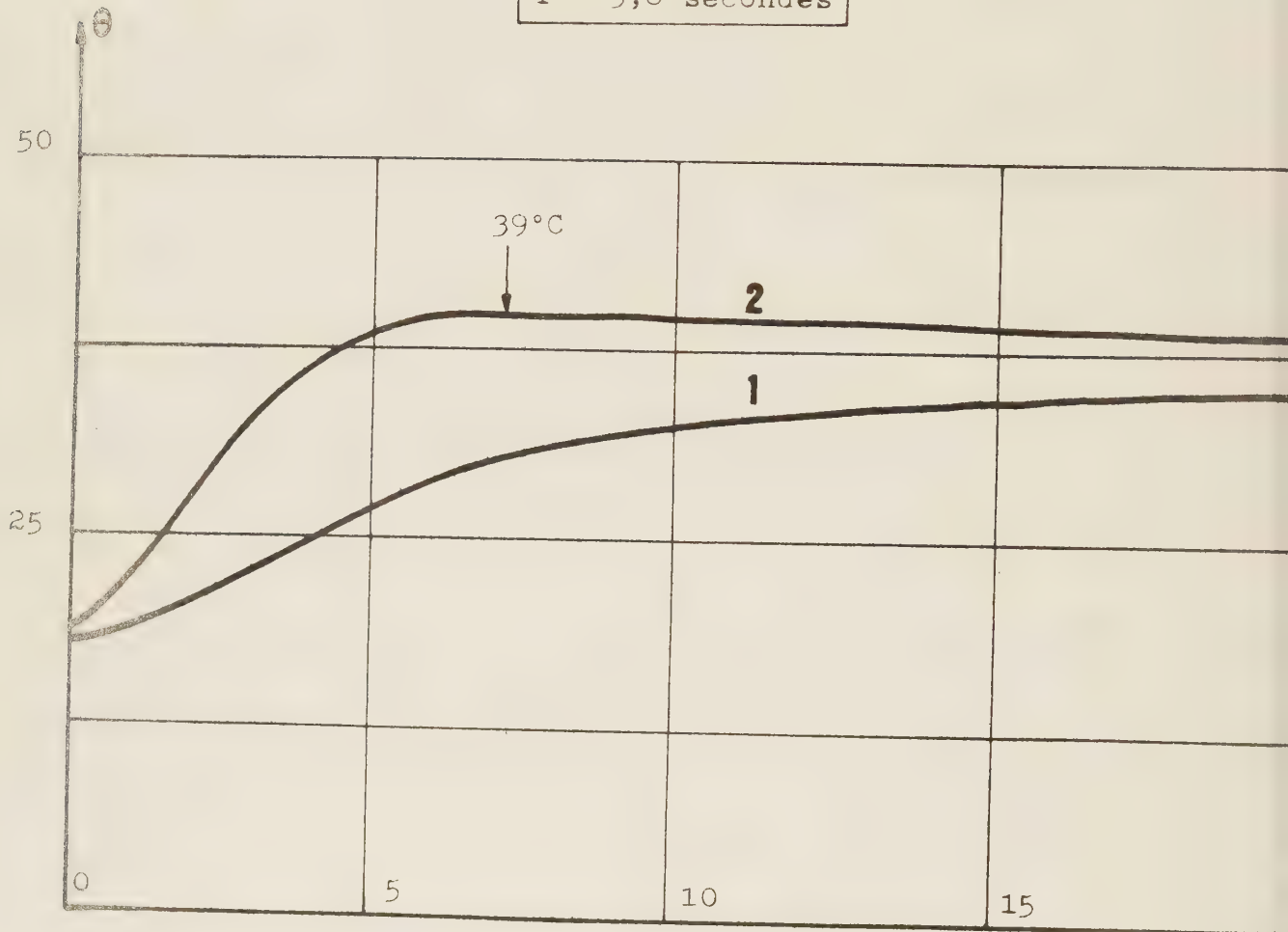
Les conclusions sont identiques à celles du premier essai de la première série, toutefois on remarque que la différence entre les deux enregistrements est plus faible.

#### **6.3.2** Deuxième essai.

La vitesse de rotation est de 2 000 tr/mn et le temps total de freinage de 6 secondes soit le temps théorique. fig 2.2

essai : 1    série 2

V = 1 000 tr/mn  
T = 3,6 secondes



thermocouples (1) et (2) à 0,5 mm de la surface

fig 2.1

essai : 2    série 2

$V = 2\ 000\ \text{tr/mn}$   
 $T = 6\ \text{secondes}$

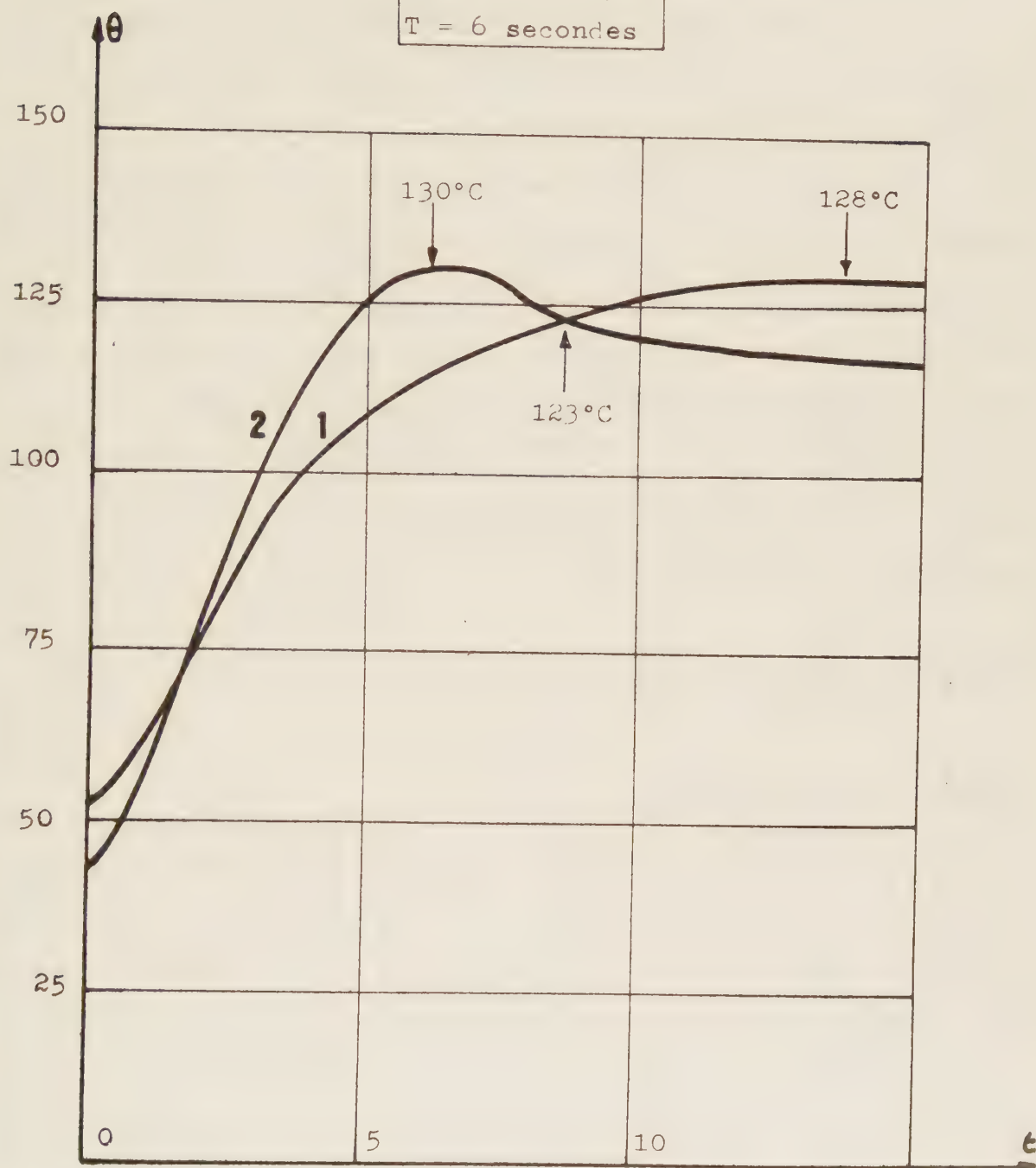


fig 2.2

Cet essai a été effectué alors que les garnitures et le disque n'avaient pas encore atteint une température initiale égale à la température ambiante et se trouvaient aux environs de 50°C.

La température maximale atteinte par le thermocouple (2) est de 130°C et celle atteinte par le thermocouple (1) de 128°C.

Un phénomène est à observer, en effet les thermogrammes se coupent ce qui tendrait à prouver qu'au début du freinage la température était supérieure au point (2) qu'au point (1); puis ces températures s'égalisaient et enfin la température au point (1) devenait supérieure à celle du point (2), ce qui pourrait s'expliquer par l'effet de "coin" des plaquettes, la pression exercée par les garnitures sur le disque étant très supérieure en (1) qu'en (2).

## **64**      TROISIEME SERIE D'ESSAIS

### **6.4.1**      Premier essai

La vitesse de rotation est de 2 000 tr/mn, et le temps total de freinage de 6 secondes égal au temps théorique. L'inversion des enregistrements provient du fait qu'au début du freinage la température en (2) est de 30°C alors que celle en (1) est de 55°C. Ceci est dû à un contact des garnitures sur le disque en avant des plaquettes durant la mise en vitesse du volant.

( fig 3.1 )

essai : 1      série 3

$V = 2\,000 \text{ tr/mn}$

$T = 6 \text{ secondes}$

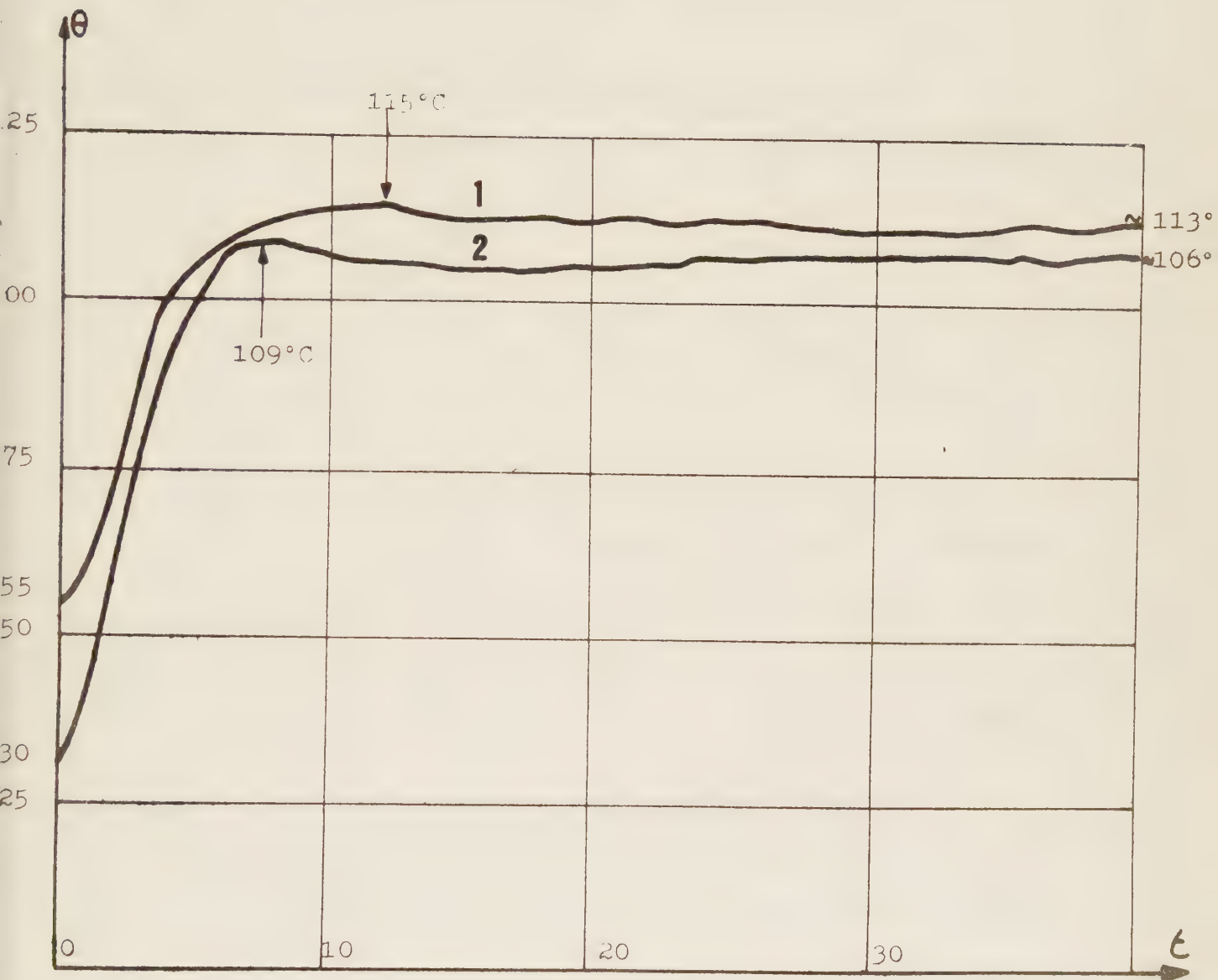


fig 3.1



## **6.4.2** Deuxième essai.

La vitesse de rotation est de 2 000tr/mn et le temps total de freinage de 6 secondes égal comme précédemment au temps théorique. La température aux points (1) et (2) est de 38°C soit 12°C de moins qu'au début du deuxième essai de la deuxième série. La température maximale atteinte en (2) est de 118°C soit 12°C de différence avec le point correspondant du 2<sup>e</sup> essai de la 2<sup>e</sup> série, et en (1) de 122°C. ( fig 3.2 )

Nous pouvons donc remarquer la reproductibilité de ce phénomène de croisement des thermogrammes.

## **6.4.3** Troisième essai.

Le thermocouple (2) se trouvait plus près de la surface de contact disque-garniture que le thermocouple (1).

La vitesse de rotation est de 2 000 tr/mn et le temps total de freinage de 6 secondes.

La différence de distance entre les thermocouples et la surface explique le saut de température maximale atteinte de 140°C au point (2).

On peut remarquer que ce maximum se produit sensiblement à la fin du coup de frein, ce qui est en accord avec les courbes de température de surface à cette vitesse.

## **6.5** CONCLUSIONS DE CES ESSAIS

La température au point (1) sur la plupart des enregistrements continue à augmenter après la fin du freinage.

essai : 5

série 3

$V = 2\,000 \text{ tr/mn}$

$T = 6 \text{ secondes}$

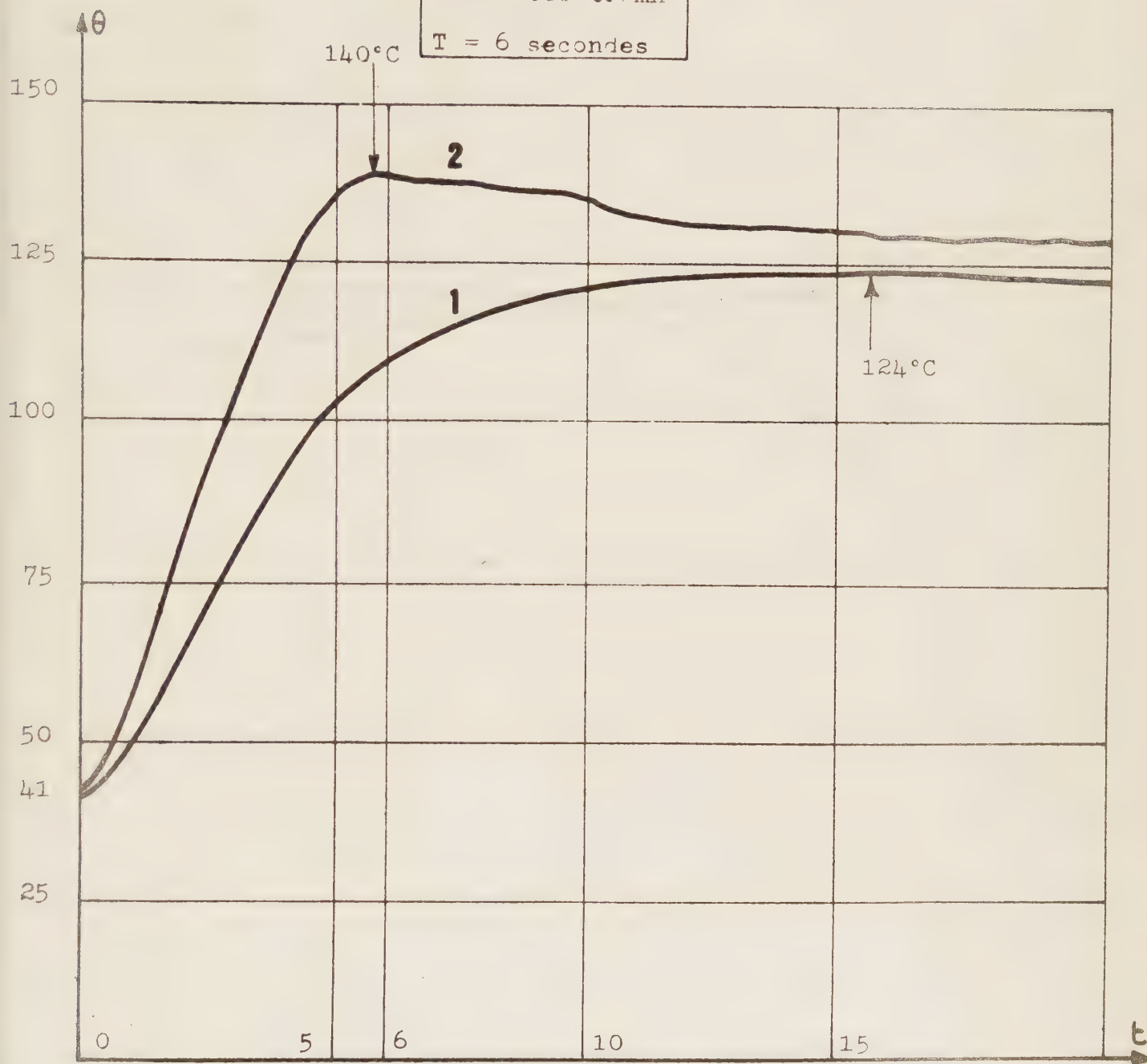


fig 3.3

essai : 2      série 3

V = 2 000 tr/mn

T = 6 secondes

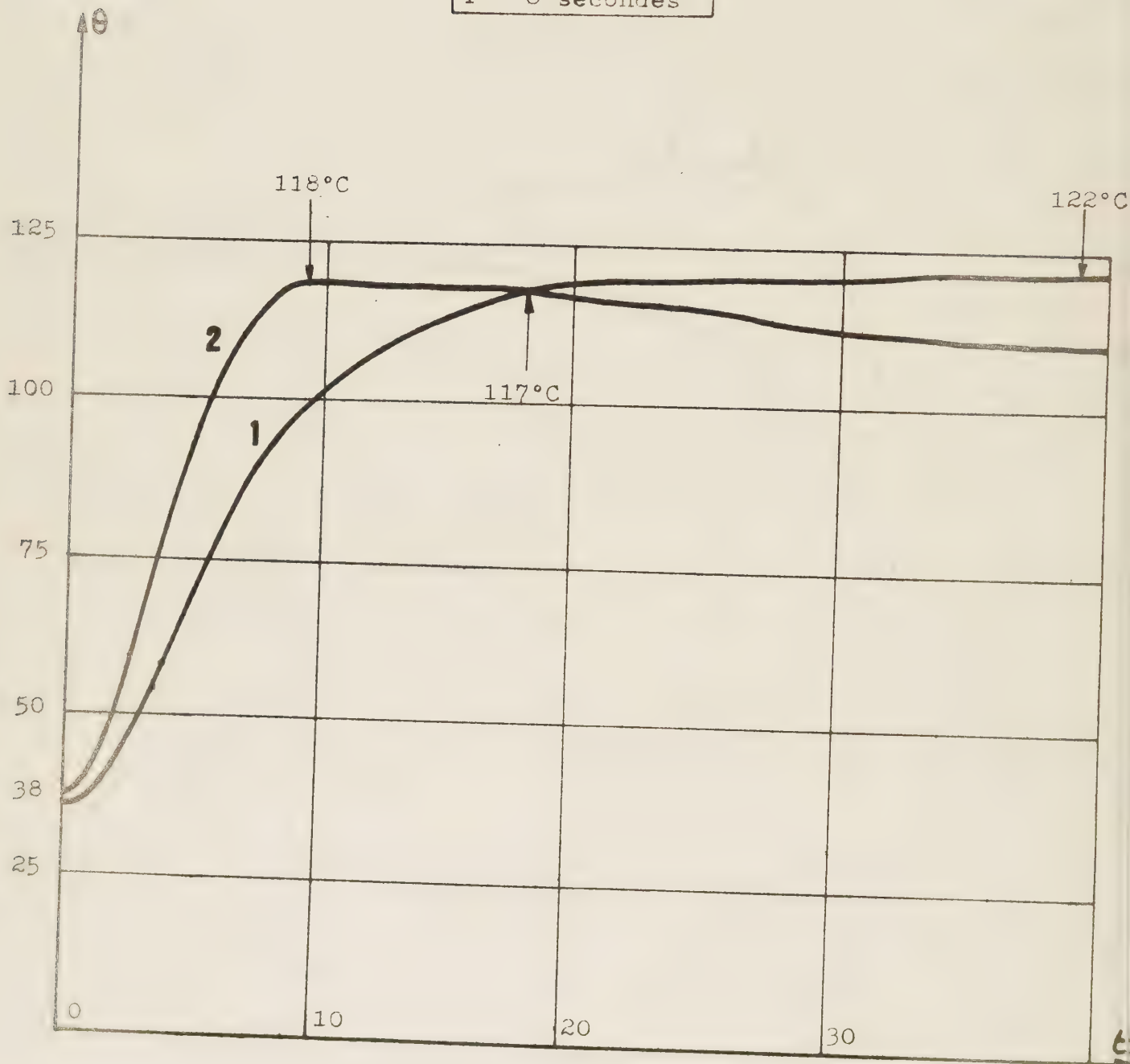
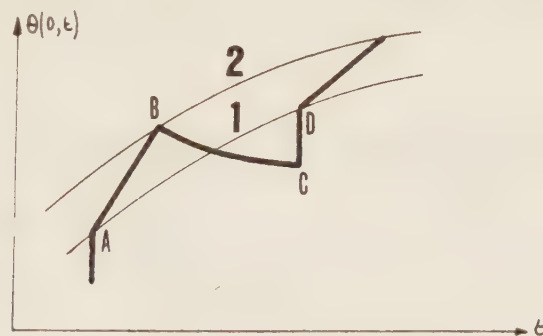


fig 3.2

Ceci s'explique par le fait que dans tous ces essais les garnitures sont restées en contact avec le disque après l'arrêt de celui-ci.

Les deuxièmes essais de la deuxième et de la troisième série montrent que l'évolution de la température en surface présente l'aspect suivant :

**6.5.1** - Durant les PREMIERS INSTANTS du freinage, la température au point (2) est supérieure à celle du point (1). L'hypothèse de calcul où on considère que durant la durée de passage du point du disque devant les garnitures, la température de surface suit une loi linéaire du temps semble vérifiée



A B : période durant laquelle le point du disque est en contact avec les garnitures.

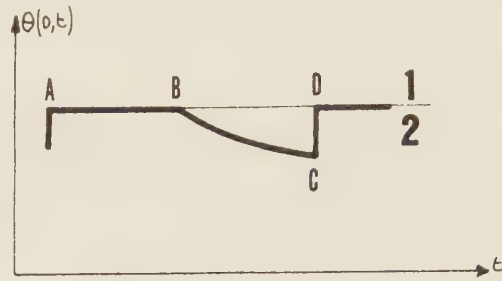
B C : période d'échange thermique par convection entre le disque et le milieu ambiant.

C D : reprise du contact du point du disque avec les garnitures, la température s'élève alors brusquement.

**6.5.2** - au milieu du freinage.

Il existe une période de très courte durée durant

laquelle les températures à l'entrée des garnitures et la sortie sont égales.

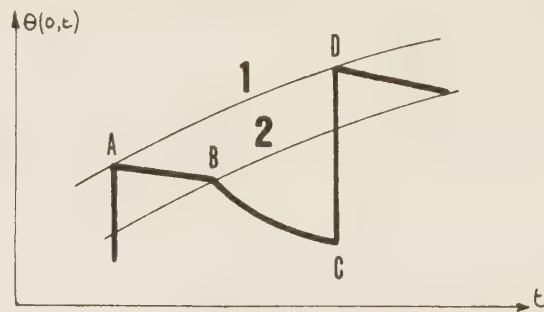


AB = période durant laquelle le point du disque est en contact avec les garnitures.

BC = période d'échange thermique par convection entre le disque et le milieu ambiant.

CD = reprise de contact avec les garnitures, la température en D étant la même que celle en A.

### 6.5.3 - Durant les derniers instants du freinage:



AB = période durant laquelle le point du disque est en contact avec les garnitures.

BC = période d'échange thermique par convection entre le disque et le milieu ambiant.

CD = reprise de contact avec les garnitures. La température en D étant supérieure à celle en B, soit , compte tenu de l'échange thermique par convection qui abaisse la température, un écart de température entraînant des "chocs thermiques".

La température atteinte lors des essais à 2 900 tr/mn (simulation d'un véhicule allant à 285 km/h) est légèrement plus élevée que celle calculée. Ceci vient principalement du fait que la surface active des plaquettes est plus faible que la surface mesurée en raison des déformations des supports en acier des garnitures lors des essais. Cette diminution de surface a lieu radialement, ceci entraîne une augmentation du flux de chaleur donc un accroissement de la température du disque.

## 7

### MESURE DES EMISSIONS INFRAROUGES

Cette solution a été envisagée pour les raisons suivantes :

1) L'énergie cinétique emmagasinée par le volant étant libérée sous forme d'énergie thermique, celle-ci provoque une émission de rayonnements infrarouges susceptibles d'impressionner des pellicules photosensibles appropriées.

2) Cette méthode ne fait intervenir aucun élément mécanique et permet donc d'établir une liaison directe entre la surface du disque et l'appareil d'enregistrement.

3) Il est possible par ce moyen d'effectuer des mesures différentielles en étalonnant dans les mêmes conditions que celles des mesures réalisées lors des essais.

Les prises de vues sont effectuées au moyen d'appareils photographiques équipés de film sensible au rayonnement infrarouge du type "Ektachrome".



Le "Service des Recherches" de la Société Kodak a  
fourni les renseignements suivants :

- sensibilité du film:

appareils non équipés de filtre.....200 A.S.A.

appareils équipés de filtre WR 87.....40 A.S.A.

Le filtre WR 87 supprime les rayonnements ultra violets  
et infra rouges dus à la lumière ambiante, mais réduit considé-  
rablement la sensibilité.

Il est possible d'utiliser un filtre jaune n° 12  
atténuateur d'ultra violets, et qui permet d'obtenir une sensi-  
bilité comprise entre 200 et 40 A.S.A.

- réglages:

Ces valeurs ont été données pour un film infrarouge  
noir et blanc, l'appareil étant équipé d'un filtre WR 87.

|         |                    |                       |
|---------|--------------------|-----------------------|
| 300°C   | temps d'exposition | 30 secondes           |
| 600°C   |                    | 1/30 de seconde f8    |
| 1 000°C |                    | 1/1000 de seconde f16 |

Les sensibilités de ce film I.R haute sensibilité sont:

- sans filtre WR 87 400 ASA
- avec filtre WR 87 80 ASA.

Les valeurs ci dessus, données par Kodak sont celles  
recueillies au cours de leurs essais et ne sont selon eux, que  
très approximatives. En outre, elles ont été obtenues dans des  
conditions particulières, notamment celle de prise de vues dans  
le noir complet.

Aussi cette méthode nécessite-t-elle un processus opératoire complexe. Il est nécessaire d'effectuer des essais de sensibilité afin d'optimiser le réglage. Ces essais étant faits il est alors nécessaire que les conditions de prise de vues soient reproductibles, ce qui est difficilement réalisable, notamment dans notre cas.

La série d'essais a été réalisée en trois parties :

1) Prise de vue de l'ensemble du disque à l'aide de trois appareils photographiques : 2 sont équipés d'un film ektachrome I.R. et le dernier est équipé d'un film noir et blanc panchromatique.

2) Prise de vues de l'ensemble du disque à l'aide des appareils équipés en I.R. afin d'étalonner le film.

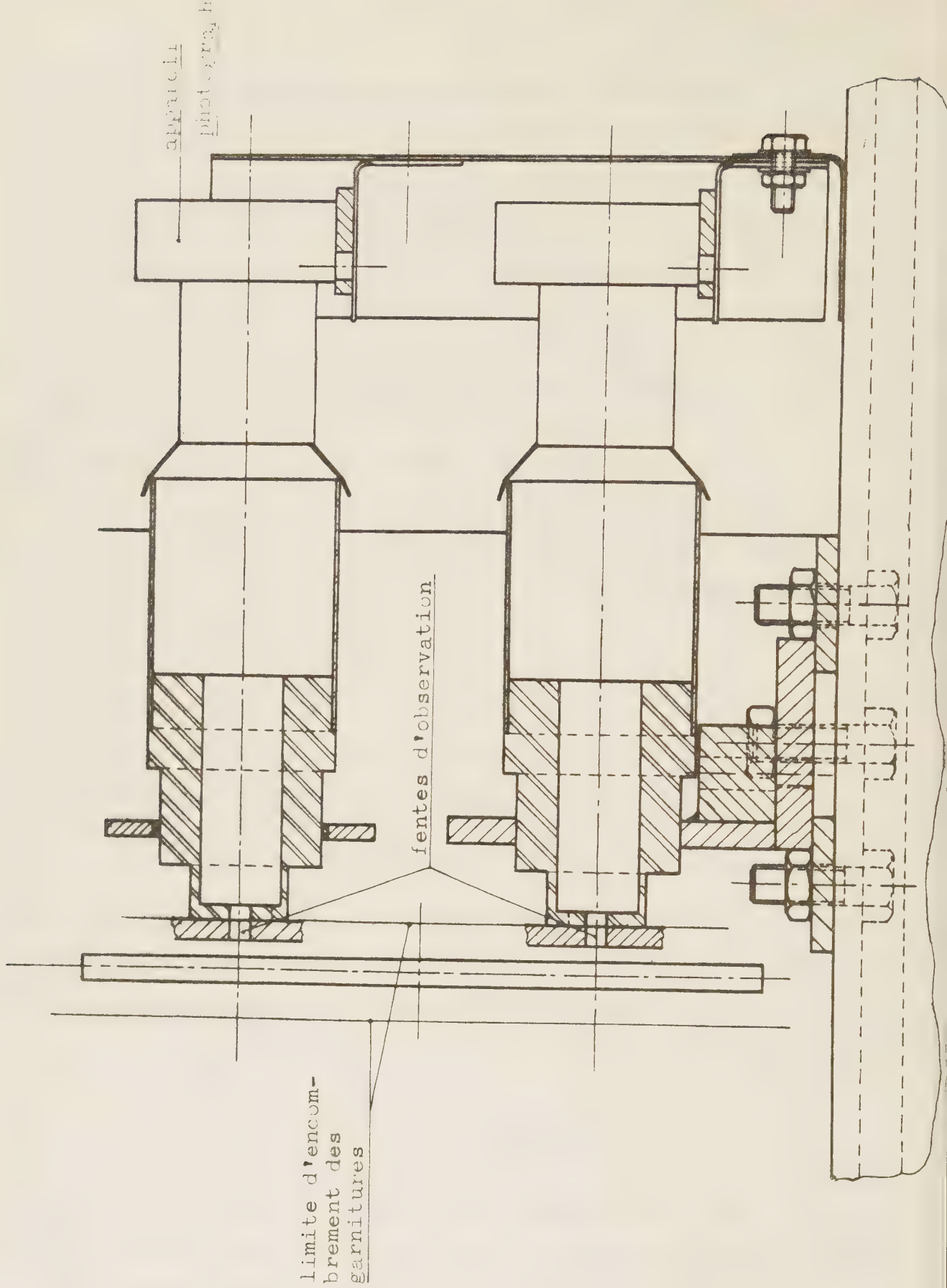
3) Prise de vues par l'intermédiaire de fenêtres pratiquées dans l'étrier (détail et montage de l'ensemble pages 266 et 267) à l'aide des appareils équipés en I.R.

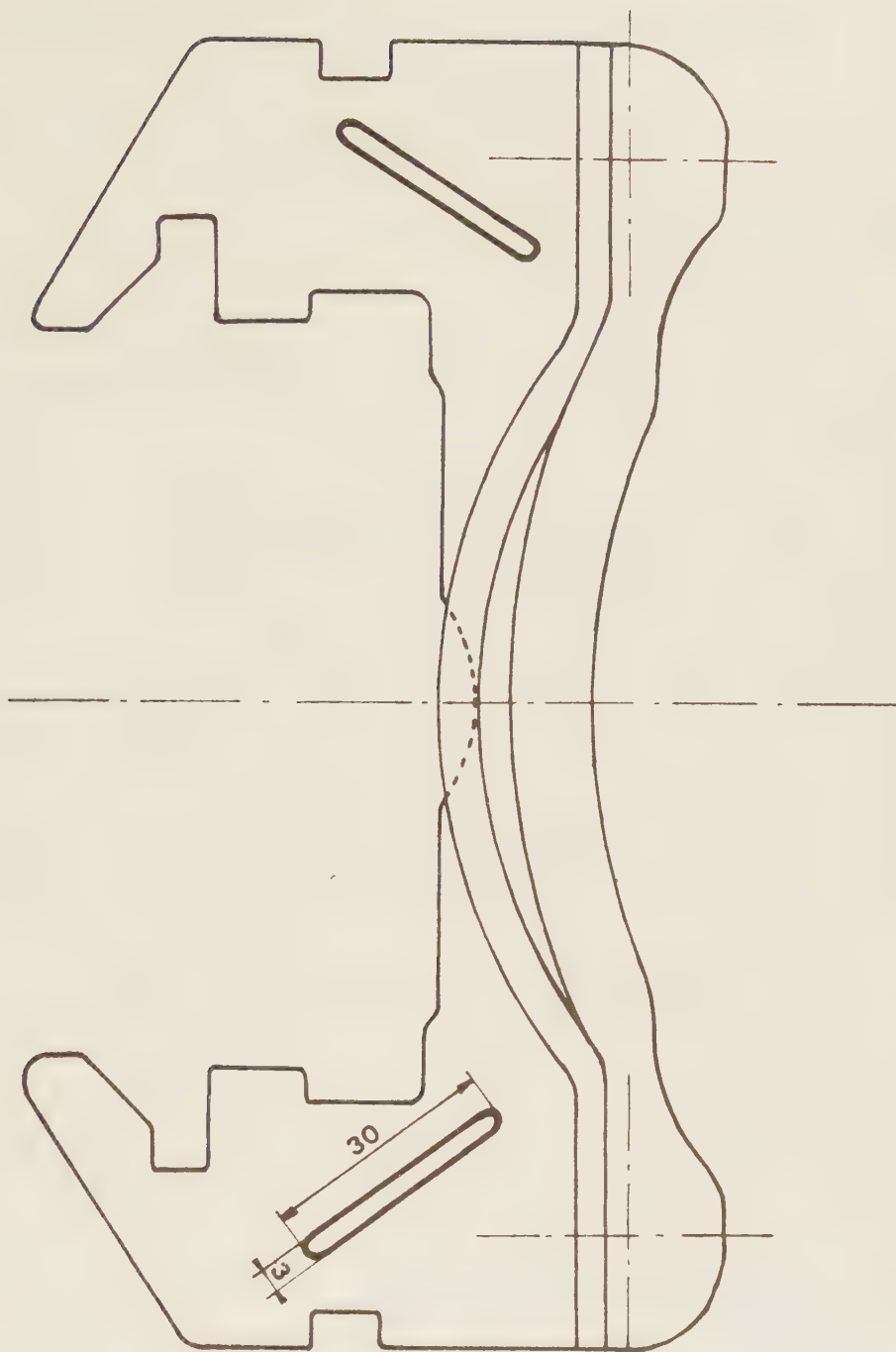
- Les enregistrements ont été établis au cours d'essais à 2 900 tr/mn.

- Les appareils équipés de film I.R. sont déclenchés simultanément à l'aide d'un déclencheur souple double.

## **7.1** Première série d'essais.

Les trois appareils sont placés à 1 m du disque. Les deux appareils chargés en I.R. sont placés sur une même traverse parallèle au disque, alors que le troisième est placé sur un pied, dans le même plan que les deux autres.





Au cours de cette série, les réglages furent les suivants:

|                    |      |       |                    |
|--------------------|------|-------|--------------------|
| appareil 1 (Canon) | 1/60 | f.5,6 | I.R.               |
| 2 (Minolta)        | 1/60 | f.2,8 |                    |
| 3 (Hasselblad)     | 1/30 | f.2,8 | (TRI X Pan 400ASA) |

## 7.2 Deuxième série d'essais.

Cette série a pour but d'étalonner les films .Seuls les appareils équipés en I.R. sont montés de la même façon que précédemment.

Pour réaliser l'étalonnage, un disque est placé sur la machine d'essais dans les mêmes conditions que lors d'une opération de freinage. La plage supérieure du disque, située juste après l'étrier est chauffée à l'aide d'un chalumeau. La température est mesurée à l'aide d'un thermocouple de contact appliqué sur la surface, dont on peut lire la force électromotrice sur l'un des galvanomètres enregistreurs employés précédemment.

Les appareils 1 et 2 étaient réglés de la façon suivante :

|              |      |         |
|--------------|------|---------|
| appareil 1 : | 1/60 | f = 5,6 |
| 2 :          | 1/60 | f = 2,8 |

## 7.3 Troisième série d'essais.

Cette série utilise le montage représenté page 266, les appareils utilisés sont ceux équipés de film I.R.

Les réglages des appareils sont les suivants :

|              |      |         |
|--------------|------|---------|
| appareil 1 : | 1/60 | f = 5,6 |
| 2 :          | 1/60 | f = 2,8 |



Les prises de vues furent effectuées au cours d'essais à 2 900 tr/mn en utilisant un disque de frein neuf.

#### **7.4** Conclusions de ces essais.

Les photographies obtenues proviennent uniquement de l'appareil 2 (1/60,  $f = 2,8$ ). En conséquence, les réglages qui ont été fournis par Kodak ne peuvent être pris en considération.

Des renseignements ultérieurs nous offrent d'autres valeurs plus en accord avec les résultats.

Il faut considérer le film ektachrome comme un film polychromatique ordinaire de sensibilité 64 A.S.A. sans filtre WR 87. Les ouvertures et vitesses optimales sont à déterminer au moyen d'une cellule photo-électrique.

Les photographies obtenues permettent de tirer les conclusions suivantes :

Les températures de surface calculées sont plus faibles que les températures de surface réelles, dans les premiers instants du freinage.

Sur les photographies des pages 203 et suivantes, le fait que la pression ne s'exerce pas régulièrement entre les garnitures et le disque est très nettement visible, ceci entraîne un flux de chaleur pénétrant dans le disque non constant radialement, d'où un gradient de température de surface non nul suivant une direction perpendiculaire à l'axe.

Dans les derniers instants du freinage, la température de surface calculée est sensiblement la même que celle déduite



des précédentes mesures, soit une valeur comprise entre 680 et 750°C pour une vitesse initiale du disque de 2 900 tr/mn.

Les mesures par photographie et lecture densitométrique ne peuvent donc donner une précision que de l'ordre de 30 à 40°C pour une température de surface de 700°C. On ne peut déduire une précision relative en raison de la non linéarité des lois du rayonnement.

---

# **ANNEXES**



RAPPEL DES PRINCIPES DE THERMOCINETIQUE

**A** ENSEMBLE DES PROPRIETES GENERALES

- En régime permanent, c'est à un gradient fini de température que correspond, au sein d'un milieu matériel, une densité finie de flux de chaleur.

- On peut, en principe, au point de vue de la résistance thermique, compenser une conductibilité trop faible par une épaisseur moindre.

- Si l'on met en contact deux corps conducteurs, de températures différentes, il se produit, en cet instant et sur la surface de jonction un phénomène thermocinétique violent.  
(Théoriquement infini)

- Une intervention thermique brusque, dont les effets sont très violents, ne provoque d'effet violent, pendant un certain temps, qu'à une certaine distance; il suffit souvent d'une faible épaisseur de matière pour que règne au delà le repos thermique, pendant un certain temps.

- Cet effet d' "écran" a pour conséquence qu'un phénomène thermique, provoqué à la surface d'un solide d'épaisseur limitée, évolue dans les premiers instants de la même manière que si la profondeur était illimitée ( ce qui peut simplifier

certain calculs). Ce principe sert d'hypothèse dans la première partie de l'étude de  $\Theta(x,t)$ , (dans les premiers instants du freinage), dans le cas où on ne néglige pas les échanges thermiques par convection et où on considère le disque comme étant la juxtaposition de deux milieux semi infinis.

- Il en résulte aussi qu'une quantité de chaleur introduite dans la matière y progresse par diffusion.

- Lorsqu'une onde thermique pénètre dans un milieu conducteur et y crée un état de régime, l'onde progresse avec un amortissement proportionnel à la racine carrée de la fréquence et à la racine carrée de la résistivité.

- Il y a analogie, du fait des équations caractéristiques entre la thermocinétique et l'électrostatique, en particulier les capacités calorifiques correspondent aux capacités électrostatiques, et les résistances se correspondent de même, mais les ordres de grandeur pratiques sont tels que, vis à vis de l'électricité, les capacités calorifiques sont très grandes ainsi que les résistivités thermiques.

- Il est à remarquer qu'on tend à être surpris de l'énormité de l'énergie mécanique qui peut se dissiper en chaleur dans une plaque matérielle modeste, comme un disque de frein, sans que la température devienne inadmissible.

- Les capacités calorifiques par unité de volume, sont toutes du même ordre pour les solides et les liquides tandis que

l'éventail des conductivités (ou des résistivités, qui en sont l'inverse) est assez ouvert, mais incomparablement moins que celui des conductivités électriques.

- Les phénomènes thermocinétiques non permanents se distinguent par la valeur élevée de leur inertie, pour la double raison de la valeur élevée des capacités et des résistivités.

- C'est la notion de constante de temps thermocinétique qui règle cette inertie.

- Il résulte de la théorie de Fourier que l'intensité du champ de température, c'est à dire, de l'échauffement en un point, s'exprime en régime transitoire par une série de fonctions  $A e^{-t/\tau}$ ,  $\tau$  étant une constante de temps.

Si  $\tau$  est petit, dès que  $t$  n'est plus petit lui-même l'exposant négatif devient grand en valeur absolue et la terme  $A e^{-t/\tau}$  s'évanouit.

Si  $\tau$  est notable, la variation de l'exponentielle est lente et le terme se manifeste longtemps. La plus longue des constantes de temps  $\tau$ , dite "constante de temps fondamentale" donne une idée précise de la lenteur des phénomènes transitoires c'est à dire de la lenteur de l'établissement ou de la disparition d'un phénomène thermocinétique.

- Les constantes de temps sont proportionnelles au carré du chemin le plus court que doit parcourir le flux de chaleur, d'où il suit que, dans les ensembles de grandes dimensions la constante de temps fondamentale peut être énorme (des mois) ou très faible (des fractions de secondes) dans le cas des pla-



ques minces.

- Cette constante de temps fondamentale est en rapport avec la durée d'effet d'écran.

- Quand le régime est permanent, les caractéristiques physiques, les dimensions géométriques et le temps interviennent dans les lois de température ou de quantité de chaleur avec l'exposant 1.

Dans les états transitoires, ces paramètres interviennent par leur racine carrée, d'où résulte la propriété suivante que la petitesse d'une grandeur ou du temps n'intervient que modérément et donc :



- que l'éventail des caractéristiques, déjà peu ouvert, se resserre encore.

- que les phénomènes brefs ont le temps d'avoir une efficacité inattendue pour  $t$  partant de 0 et restant petit,  $\sqrt{t}$  croissant beaucoup plus vite que  $t$  de sorte que l'effet d'un phénomène transitoire peut, par suite de la loi en racine carrée dérouter complètement les prévisions.

- Si le flux de chaleur est commandé, en régime permanent par la seule conductivité, en régime transitoire on voit apparaître sous le nom de "coefficient d'arrachement" ou de "coefficient d'effusivité" la racine carrée du produit de la conductivité par la chaleur spécifique volumique. Si une densité de flux tombe sur une surface conductrice, la température super-

ficielle augmente proportionnellement à la racine carrée du temps et en raison inverse du coefficient d'effusivité.

$$T = k \cdot \sqrt{t} \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho c}}$$

- Quand s'établit un régime périodique, il tient à la fois du permanent et du transitoire, aussi certaines formules peuvent elles contenir les caractéristiques et le temps dans des expressions non trigonométriques avec des exposants qui sont 1 ou 1/2.

- Lorsqu'un phénomène de convection intervient dans un régime, qu'à l'échelle de l'observation on dirait permanent, comme le mécanisme convectif est d'ordre transitoire (à petite échelle), attendu que le filet fluide ne refroidit que durant le temps bref où il lèche le corps chaud, les lois, là encore prennent une allure complexe, relevant de la proportionnalité et de la loi en racine carrée, ce qui peut conduire en fait à certains paradoxes.

- Un flux de chaleur de durée brève, tombant normalement sur un conducteur y progresse droit devant lui, de sorte qu'on peut traiter le problème comme UNIDIMENSIONNEL, ce qui peut permettre à la fois une grande simplification des problèmes théoriques et une interprétation plus simple des procédures expérimentales.

Il en résulte que si une formule théorique devient très simple aux grandes valeurs du temps, il faut éviter, en général, d'en tirer parti pour une méthode de mesure, car quand

t est notable, le phénomène ne sera plus unidimensionnel, d'ordinaire, et la formule deviendra inexacte.

## B

### EQUATION AUX TEMPERATURES OU EQUATION DE LA CHALEUR

La thermocinétique est l'étude des champs de température au sein de la matière, parceque seule la température est accessible. Mais la quantité de chaleur étant une notion "commode", il faudra donc que la théorie relie la notion de chaleur à la notion de température.

La température introduit la notion de chaleur par deux voies :

1- En thermodynamique, quand une capacité calorifique (dépendant ou non de la température) éprouve, dans sa température  $T$  un taux de variation dans le temps  $= \frac{\partial T}{\partial t}$ , c'est qu'elle reçoit de ce fait un flux de chaleur :  $q = C \frac{\partial T}{\partial t}$

2- En thermocinétique, quand au sein d'une substance immobile, la température  $T$  en un point varie le long d'une ligne orientée  $\vec{n}$ , passant par le point, un élément de surface passant par ledit point et normal à  $\vec{n}$  est traversé par une densité de flux de chaleur  $\varphi$  égale au produit, changé de signe, du gradient  $\frac{\partial T}{\partial n}$ , par le nombre positif appelé coefficient de conductivité thermique.

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

Si la chaleur spécifique est  $C$ , la masse volumique  $\rho$ ,

l'équation aux températures dite équation de la chaleur s'écrit selon Fourier en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

En général, il serait risqué de négliger la variation thermique de  $\lambda$  ( ici, elle intervient directement en ce que  $T$  varie en chaque point :

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right) = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} - \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)^2 \frac{\partial \lambda}{\partial T} \quad )$$

Cependant pour des raisons de simplification, et en raison la plupart du temps de la faible incidence de la variation de  $\frac{\partial \lambda}{\partial T}$ , l'équation de la chaleur se réduit à :

$$\Delta^2 T = \frac{\rho c}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

en posant  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$  = coefficient de DIFFUSIVITE thermique.

## ANNEXE 2

### CALCUL DE LA SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$$

Nous partons pour cela de la formule de Moivre :

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2p+1} = \cos (2p+1)\alpha + i \sin (2p+1)\alpha$$

Nous disposons aussi de la relation :

$$\begin{aligned} \sin (2p+1)\alpha = & C_{2p+1}^1 \sin \alpha \cos^{2p} \alpha - C_{2p+1}^3 \sin^3 \alpha \cos^{2p-2} \alpha + \dots \\ & \dots + (-1)^p C_{2p+1}^{2p+1} \sin^{2p+1} \alpha. \end{aligned}$$

Si  $\alpha$  est différent de  $k\pi$  cela implique que  $\sin^{2p+1} \alpha$  est différent de 0; nous pouvons alors faire le rapport :

$$\frac{\sin (2p+1)\alpha}{\sin^{2p+1} \alpha} = C_{2p+1}^1 \cotg^{2p} \alpha - C_{2p+1}^3 \cotg^{2p-2} \alpha + \dots + (-1)^p C_{2p+1}^{2p+1}$$

Cette expression est nulle si  $\sin(2p+1)\alpha=0$  soit  $\alpha = i\pi/2p+1$

$u_i = \cotg^2 i\pi/2p+1$ , avec  $i$  compris entre 1 et  $p$ , sont les seules solutions de :

$$C_{2p+1}^1 u^p - C_{2p+1}^3 u^{p-1} + C_{2p+1}^5 u^{p-2} + \dots + (-1)^p = 0$$

$$\text{Posons } U = \sum_{i=1}^p u_i^2 = \sum_{i=1}^p \cotg^4 i\pi/2p+1 = \left( \sum_{i=1}^p u_i \right)^2 - 2 \sum u_i u_j$$

avec  $1 \leq i < j \leq p$

$$\sum u_i = \frac{C_{2p+1}^3}{C_{2p+1}^1} \quad \text{et} \quad \sum u_i u_j = \frac{C_{2p+1}^5}{C_{2p+1}^1}$$



$$\left(\frac{c_{2p+1}^3}{c_{2p+1}^1}\right)^2 - 2\left(\frac{c_{2p+1}^5}{c_{2p+1}^1}\right) = U \quad \text{qui est égal à } 16 p^4/90 \text{ quand}$$

$p$  tend vers l'infini.

$$V = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\sin^4 i\pi/2p+1} = p + U \quad \text{car :}$$

$$1 / \sin^4 x = 1 + \cotg^4 x + 2 \cotg^2 x$$

posons  $t = i\pi/2p+1$  avec  $1 \leq i \leq p$   $t \in ]0, \pi/2[$

0 étant la valeur pour laquelle le sinus est nul et  $\pi/2$  celle pour laquelle la tangente n'est pas définie.

$$\sin t < t < \operatorname{tg} t$$

$$1 / \sin^4 t > 1/t^4 > 1 / \operatorname{tg}^4 t$$

$$V > \sum_{i=1}^{i=p} ((2p+1)/\pi)^4 \cdot 1/i^4 > U$$

$$\pi^4 V / (2p+1)^4 > \sum_{i=1}^{i=p} 1/i^4 > \pi^4 U / (2p+1)^4$$

Quand  $p$  tend vers l'infini  $U$  est équivalent à  $16p^4/90$  ainsi que  $V$

$$\sum_{i=1}^{i=p} 1 / i^4 \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi^4}{16p^4} \cdot \frac{16p^4}{90}$$

soit finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$



### ANNEXE 3

La transformation de la formule donnant la température de surface dans un milieu limité à partir de certaines propriétés des fonctions d'erreurs permet de retrouver l'élévation de température en surface dans un milieu illimité.

Soit la formule générale :

$$\Delta\theta = \frac{2\ell}{\pi^2\lambda} \left[ m \frac{t}{2} \left( q_0 - \alpha \frac{t}{2} \right) + \frac{\pi^2}{6} \left( q_0 - \alpha t \right) - q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 m t} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 m t} \right]$$

Partons de l'identité :

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \cdot e^{-n^2 v} = \sqrt{\frac{\pi}{v}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\varphi - n^2 \pi}{4v}\right)^2} \quad (1)$$

Faisons  $\varphi = 0$  dans l'identité (1), nous obtenons :

$$1/2 + e^{-v} + e^{-4v} + \dots + e^{-n^2 v} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{v}} + \sqrt{\frac{\pi}{v}} \left( e^{-\frac{\pi^2}{v}} + e^{-\frac{4\pi^2}{v}} + \dots + e^{-\frac{n^2 \pi^2}{v}} + \dots \right)$$

Intégrons terme à terme entre 0 et v

$$\frac{v}{2} + \frac{\pi^2}{6} \cdot \left( e^{-v} + \frac{1}{4} e^{-4v} + \dots + \frac{1}{n^2} e^{-n^2 v} \right) = \sqrt{\pi v} + \int_v^0 \sqrt{\frac{\pi}{v}} \left( e^{-\frac{\pi^2}{v}} + \dots + e^{-\frac{n^2 \pi^2}{v}} + \dots \right) dv \quad (1')$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \text{ provenant de } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 v} \text{ pour } v = 0$$

Soit  $I_n$  l'intégrale  $\int_0^v \sqrt{\frac{\pi}{v}} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{v}} dv$

elle vaut après intégration par parties et en posant :

$$\frac{n^2 \pi^2}{v} = u^2$$

$$I_n = 2\sqrt{\pi v} \cdot e^{-n^2 \pi^2 / v} - 4 n \pi \sqrt{\pi} \int_{n \frac{\pi}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-u^2} du$$

En partant de l'équation (1') nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{v}{2} + \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 v} &\equiv \sqrt{\pi v} + 2\sqrt{\pi v} \left( e^{-\frac{\pi^2}{v}} + e^{-\frac{4\pi^2}{v}} + \dots + e^{-\frac{n^2 \pi^2}{v}} + \dots \right) \\ &\quad - 2\pi^2 \left[ \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{v}}} e^{-u^2} du \right) + 2 \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{v}}} e^{-u^2} du \right) + \dots \right] \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 v} &= \sqrt{\pi v} + 2\sqrt{\pi v} \left( e^{-\frac{\pi^2}{v}} + \dots + e^{-\frac{n^2 \pi^2}{v}} + \dots \right) - \\ &\quad - 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{erfc} \left( \frac{n\pi}{\sqrt{v}} \right) - \frac{v}{2} - \frac{\pi^2}{6} \quad (2) \end{aligned}$$

Par ailleurs calculons la quantité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 / n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 v} / n^4$$

Calculons la primitive de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 v} / n^2 \quad \text{à partir de la formule (2) entre 0 et } v$$

$$\int_0^v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 v} \cdot dv = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 v} \right]_0^v =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 v} \equiv \frac{v^2}{4} + \frac{\pi^2 v}{6} - \frac{2}{3} \sqrt{\pi v^{3/2} - 2} \\ + \sqrt{\pi} \int_0^v \left( \sqrt{v} \cdot e^{-\pi^2/v} + \dots + \sqrt{v} \cdot e^{-n^2 \pi^2/v} \right) dv + 2\pi^2 \int_0^v \operatorname{erfc} \frac{\pi}{\sqrt{v}} dv + \dots$$

Posons  $I = \int_0^v \sqrt{v} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{v}} dv$

Nous obtenons après intégration par parties :

$$I = \frac{2}{3} v^{3/2} e^{-\pi^2/v} - \frac{4}{3} \pi \sqrt{v} \cdot e^{-\pi^2/v} + \frac{8}{3} \pi^2 \sqrt{v} \int_{\frac{\pi}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-u^2} du$$

Il vient :

$$\frac{\Delta \theta}{q_0} = \frac{2l}{\pi^2 \lambda} \left[ \sqrt{\pi v} + 2\sqrt{\pi v} \left( e^{-\pi^2/v} + \dots + e^{-n^2 \pi^2/v} + \dots \right) - 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{erfc} \frac{n\pi}{\sqrt{v}} \right] - \\ - \frac{2\alpha}{m} \sqrt{\pi} \cdot v^{3/2} - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{m} \sqrt{\pi} \cdot v^{3/2} \cdot e^{-\pi^2/v} + \frac{8\alpha}{3m} \pi^2 \sqrt{v} \cdot e^{-\pi^2/v} - \\ - \frac{16\alpha}{m} \pi^3 \int_{\frac{\pi}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-u^2} du + \frac{2\alpha}{m} \pi^2 \int_0^v \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{erfc} \frac{n\pi}{\sqrt{v}} dv$$

$$v = mt$$

Si  $\pi/\sqrt{v}$  est assez grand, c'est à dire si  $mt$  est petit les intégrales  $\operatorname{erf} \frac{n\pi}{\sqrt{v}}$  peuvent recevoir le développement asymptotique.

$1 - \operatorname{erf} \frac{n\pi}{\sqrt{v}} = \operatorname{erfc} \frac{n\pi}{\sqrt{v}}$  qui tend vers 0 quand  $\frac{n\pi}{\sqrt{v}}$  est grand.

$$m = \frac{\pi^2}{l^2} a \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad v = \sqrt{mt} \quad \alpha = q_0/T$$

Finalement il ne reste plus que :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta}{q_0} &= \frac{2l}{\pi^2\lambda} \left[ \sqrt{\pi v} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha}{m} \sqrt{\pi} \cdot v^{3/2} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{2 q_0 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda \rho c}} \left( 1 - \frac{2t}{3T} \right)}$$

Cette formule est celle obtenue précédemment donnant l'élévation de température de surface dans un milieu illimité.

---

## ANNEXE 4

L'écart relatif entre la température moyenne de surface d'un matériau ( $\lambda, \rho, c$ ) d'épaisseur  $l$ , et celle du même matériau d'épaisseur infinie soumis à la même loi de flux de chaleur (mêmes conditions de freinage) ne dépend au temps  $t = T/2$  et  $t = T$  que de la quantité  $l^2/4at$  (nombre de Fourier)

- En effet, si dans la formule générale du milieu limité :

$$\begin{aligned} \Delta\theta = & \frac{2l}{\pi^2\lambda} \left[ \frac{\pi^2}{4l^2} \cdot x^2 \left( q_0 - \alpha t \right) - \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{x}{l} \left( q_0 - \alpha t \right) + \right. \\ & + \frac{mt}{2} \left( q_0 - \frac{\alpha t}{2} \right) - q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n \frac{\pi x}{l} \cdot e^{-n^2 mt} + \\ & + \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos n \pi \frac{x}{l} - \frac{\alpha}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos n \pi \frac{x}{l} \cdot e^{-n^2 mt} + \\ & \left. + \frac{\pi^2}{6} \left( q_0 - \alpha t \right) \right] \end{aligned}$$

on fait  $x = 0$  pour considérer la température de surface  $\Delta\theta$  celle-ci s'écrit, en remplaçant  $\alpha$  par  $q_0/T$  pour mettre  $q_0$  en facteur et introduire  $t/T$  :

$$\begin{aligned} \Delta\theta = & q_0 \left[ \left( 2 - \frac{t}{T} \right) \frac{t}{2l\rho c} + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \frac{l}{\lambda} - \frac{2l}{\pi^2\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 mt} + \right. \\ & \left. + \frac{2l}{\pi^2\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{2l}{\pi^2\lambda} \cdot \frac{1}{mT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 mt} \right] \end{aligned}$$

Posons  $\begin{cases} l^2/4aT = K \\ t = \beta T \end{cases}$

où  $l = 2\sqrt{K}\sqrt{a}\sqrt{T}$

et remplaçons par ces valeurs dans la formule en explicitant

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad m = \frac{\pi^2 \theta}{l^2} \quad mT = \pi^2/4K \quad mt = \beta \pi^2/4K$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{l}{\lambda} &= \frac{2\sqrt{K}}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c}} \cdot \sqrt{T} = \frac{2\sqrt{K}\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda\rho c}} \\ \frac{t}{2l\rho c} &= \frac{\beta T}{4\sqrt{K}\sqrt{\frac{\lambda}{\rho c}} \cdot \sqrt{T} \cdot \rho c} = \frac{\beta\sqrt{T}}{4\sqrt{K}\sqrt{\lambda\rho c}} \end{aligned} \right.$$

ce qui implique que  $\Delta\theta$  prend la forme :

$$(1) \quad \Delta\theta = \frac{q_0 \sqrt{T}}{\sqrt{\lambda\rho c}} \cdot G(K, \beta)$$

G étant une fonction ne dépendant que de  $\beta = t/T$  et  $K = l^2/4aT$

La formule du milieu illimité est en surface :

$$\Delta\theta = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda\rho c}} \left( q_0 - \frac{2\alpha t}{3} \right)$$

Avec la même transformation  $t = \beta T$  et en remplaçant  $\alpha$  par  $q_0/T$  nous pouvons écrire :

$$(2) \quad \Delta\theta = \frac{q_0 \sqrt{T}}{\sqrt{\lambda\rho c}} \cdot \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{2}{3}\beta \right)$$

Nous voyons que le rapport des températures (1) aux



températures (2) ne dépend que de  $K = l^2 / 4aT$  et de  $\beta = t/T$

$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{G(K, \beta)}{\frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{2}{3}\beta\right)}$$

c'est à dire que pour  $\beta$  donné ( où à un instant  $t$  donné pour lequel  $\beta = 1/2$  soit  $t = T/2$ , et  $\beta = 1$  soit  $t = T$  sont les deux pratiquement intéressantes ) ce rapport NE DEPEND QUE DE  $l^2/4at$ .

---

## ANNEXE 5

### 5.1 ETUDE DE LA FONCTION D'ERREUR $\text{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-u^2} du$

Calcul de cette fonction dans le cas où la borne supérieure a une valeur finie :

$$\left. \begin{array}{l} \text{soit } I = \int_0^\alpha e^{-x^2} dx \\ \text{et } J = \int_0^\alpha e^{-y^2} dy \end{array} \right\} \text{ nous posons } I = J$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\alpha e^{-x^2} dx \int_0^\alpha e^{-y^2} dy = \iint_{\Delta} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int d\theta \int e^{-\rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ -e^{-\rho^2} \right]_0^\alpha = \frac{\pi}{4} \left[ 1 - e^{-\alpha^2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\varphi^2} d\varphi = \text{erf } \alpha = \left[ 1 - e^{-\alpha^2} \right]^{1/2}$$

### 5.2 Développement en série de la fonction d'erreur :

$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\varphi^2} d\varphi$ . Il suffit pour cela d'intégrer le développement en série de  $e^{-\varphi^2}$  entre 0 et x pour obtenir la série :

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \dots \right]$$

Cette série est convergente quel que soit  $x$ .

### 5.3 - DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE de la "fonction erreur

complémentaire" :  $1 - \operatorname{erf}(x) = \operatorname{erfc}(x)$

$$1 - \Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi - \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi$$

posons  $\xi^2 = u$

$$1 - \Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^\infty e^{-u} \cdot u^{-1/2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\infty^{x^2} u^{-1/2} d(e^{-u})$$

en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} 1 - \Theta(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ e^{-u} \cdot u^{-1/2} \right]_\infty^{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_\infty^{x^2} u^{-3/2} d(e^{-u}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-x^2} x^{-1} - \frac{e^{-x^2} x^{-3}}{2} + \frac{1.3}{2^2} \int_\infty^{x^2} u^{-5/2} d(e^{-u}) \right\} \end{aligned}$$

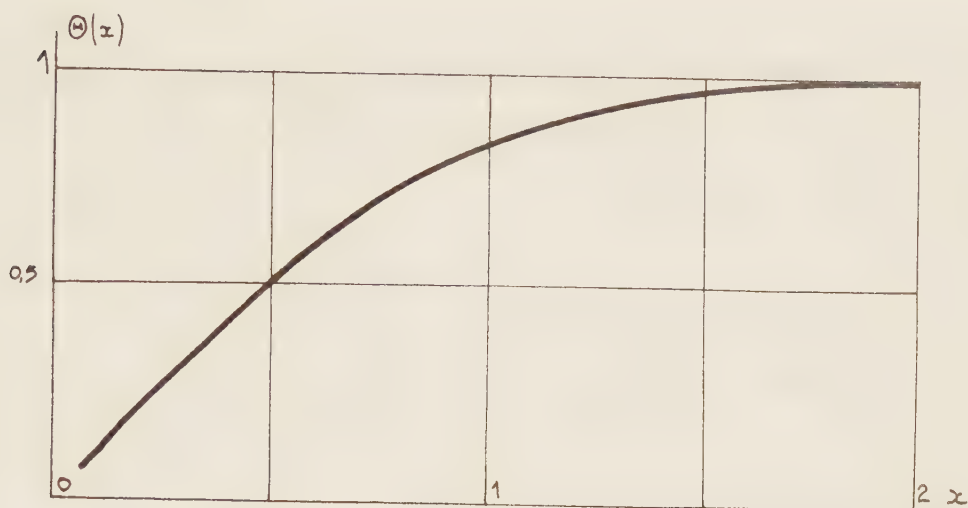
$$1 - \Theta(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[ 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{2^2 x^4} - \frac{1.3.5}{2^3 x^6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2^{n-1} x^{2n-2}} + \dots \right]$$

Cette série n'est pas convergente. Le rapport des valeurs absolues de deux termes successifs est  $2n-1 / 2x^2$ . Ce rapport sera voisin de l'unité si  $n$  est voisin de  $x^2$ . Le terme considéré est alors le plus petit possible. C'est à lui qu'il conviendra de s'arrêter afin de commettre l'erreur la

plus faible.

La courbe représentative de la fonction d'erreur

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\varphi^2} d\varphi \quad \text{a l'aspect suivant :}$$

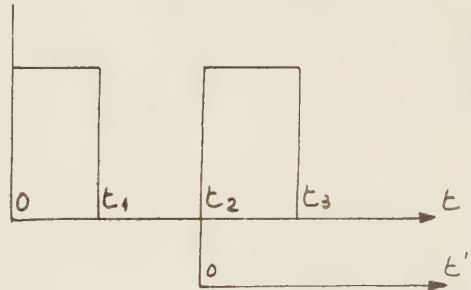


EVOLUTION DE LA TEMPERATURE en un point du disque

pendant les premiers instants du freinage.  $\theta_{s1} = \text{constant}$

**6.1** Quand le point considéré du disque revient pour la deuxième fois en contact avec les garnitures après un passage dans l'air, nous avons :

$$\begin{cases} \theta(0, t') = \theta_{s1} \\ \theta(\infty, t') = \theta_i \end{cases}$$



Nous considérons encore le modèle du mur semi infini.

La condition initiale s'écrit :

$$\theta(x, 0) = \theta(x, t_2)$$

↓  
en  $t'$

$$\theta(x, t_2) = \theta(x, t_1) + \left(1 + \frac{\lambda}{2h\sqrt{\alpha t_1}}\right) (\theta_i - \theta_{s2}) \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t_2 - t_1)}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}\alpha(t_2 - t_1)} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t_2 - t_1)}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(t_2 - t_1)} \right) \right\}$$

La solution de l'équation différentielle déduite de l'équation de la diffusion s'écrit :

$$\bar{\theta}(x, p) = A(p) \cdot e^{qx} + B(p) \cdot e^{-qx} + \theta(x, t_2)/p$$

La condition  $\theta(\infty, t') = \theta_i$  implique que  $\bar{\theta}(x, p)$  doit avoir une valeur finie quand  $x$  tend vers l'infini, donc que

Le coefficient de  $e^{qx}$  doit être nul soit  $A(p) = 0$

à  $x = 0$ , nous avons :  $\bar{\theta}(0, p) = B(p) + \theta(0, t_2)/p = \theta_{s1}/p$

ce qui conduit à  $B(p) = \frac{\theta_{s1} - \theta(0, t_2)}{p}$

avec :

$$\theta(0, t_2) = \theta_{s1} + \left(1 + \frac{\lambda}{2h\sqrt{at_1}}\right) (\theta_i - \theta_{s1}) \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2 - t_1)} \operatorname{erfc} \frac{h\sqrt{a(t_2 - t_1)}}{\lambda} \right\}$$

$$\theta(0, t_1) = \theta_{s1} \text{ et } \operatorname{erfc}(0) = 1$$

La transformée de Laplace est alors :

$$\bar{\theta}(x, p) = \frac{\theta_{s1} - \theta(0, t_2)}{p} e^{-qx} + \frac{\theta(x, t_1)}{p}$$

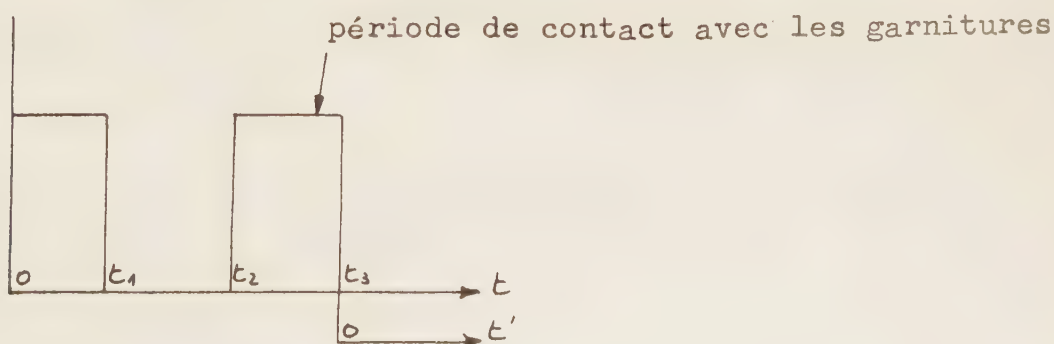
Recherchons quel est l'original de cette fonction.

L'original de  $e^{-qx}/p$  est  $\operatorname{erfc}(x/2\sqrt{at'})$  ce qui donne comme expression de la température au point considéré :

$$\theta(x, t) = \left[ \theta_{s1} - \theta(0, t_2) \right] \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_2)}} + \theta(x, t_2)$$

avec  $\theta(0, t_2)$  et  $\theta(x, t_2)$  définies précédemment.

## 6.2 Quand le point considéré revient au contact de l'air:





La solution de l'équation différentielle déduite de l'équation de la diffusion est :

$$\bar{\theta}(x,p) = A(p) \cdot e^{qx} + B(p) \cdot e^{-qx} + \theta(x,t_3)/p$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \theta(0,t_3) = \theta_{s1} \\ \theta(\infty,t') = \theta_i \end{cases} \text{ ce qui implique que } A(p) = 0$$

L'échange par convection entre le disque et le milieu ambiant s'écrit :

$$-\lambda \left[ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right]_{x=0} = h \left[ \frac{\theta_i}{p} - \bar{\theta}(x,p) \right]_{x=0}$$

$$\bar{\theta}(0,p) = B(p) + \frac{\theta_{s1}}{p}$$

Le calcul de la dérivée par rapport à x de la température permet de déterminer B(p) .

$$\left[ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right]_{x=0} = -B(p) \cdot q + \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial \theta(x,t_3)}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$\left[ \frac{\partial \theta(x,t_3)}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta_{s1} - \theta(0,t_2) \right) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t_3-t_2)}} + \frac{\partial \theta(x,t_2)}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$\left[ \frac{\partial \theta(x,t_2)}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[ \frac{\partial \theta(x,t_1)}{\partial x} \right]_{x=0} + \left( 1 + \frac{\lambda}{2h\sqrt{\alpha t_1}} \right) (\theta_i - \theta_{s1}) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t_2-t_1)}} - e^{\frac{hx}{\lambda} + \frac{h^2}{\lambda^2} \alpha (t_2-t_1)} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t_2-t_1)}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(t_2-t_1)} \right) \right] \right\}_{x=0}$$

$$\left[ \frac{\partial \theta(x,t_1)}{\partial x} \right]_{x=0} = -(\theta_{s1} - \theta_i) \times \frac{1}{2\sqrt{\alpha t_1}}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t_2-t_1)}} \right]_{x=0} = \left[ \frac{\partial \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{a(t_2-t_1)})}{\partial x} \times \frac{\partial (x/2\sqrt{a(t_2-t_1)})}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$= -1/2\sqrt{a(t_2-t_1)}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}a(t_2-t_1)} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t_2-t_1)}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)} \right) \right] \right\}_{x=0} =$$

$$= \left( \frac{h}{\lambda} e^{\frac{h^2}{\lambda^2}a(t_2-t_1)} \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)} \right) + e^{\frac{h^2}{\lambda^2}a(t_2-t_1)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t_2-t_1)}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)} \right) \right\}_{x=0}$$

Importance relative de  $x/2\sqrt{a(t_2-t_1)}$  et  $\frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)}$

$$x/2\sqrt{a(t_2-t_1)} = 10^{-3}/2 \sqrt{0,13 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} \text{ pour } x = 1\text{mm}$$

$$= \text{de l'ordre de } 1.$$

$$\frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)} = \sqrt{0,13 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} = \text{de l'ordre de } 10^{-4}$$

cette constatation conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t_2-t_1)}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)} \right) \sim \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t_2-t_1)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_2) = (\theta_i - \theta_{s1}) \times \frac{1}{2\sqrt{at_1}} + \left( 1 + \frac{\lambda}{2h\sqrt{at_1}} \right) (\theta_i - \theta_{s1}) \times$$

$$\times \left\{ \frac{-1}{2\sqrt{a(t_2-t_1)}} - \frac{h}{\lambda} \left( e^{\frac{h^2}{\lambda^2}a(t_2-t_1)} \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)} \right) - \left( e^{\frac{h^2}{\lambda^2}a(t_2-t_1)} \times \frac{-1}{2\sqrt{a(t_2-t_1)}} \right) \right\}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_2) \right]_{x=0} = (\theta_i - \theta_{s1}) \times \frac{1}{2\sqrt{at_1}} + \left( 1 + \frac{\lambda}{2h\sqrt{at_1}} \right) (\theta_i - \theta_{s1}) \times$$

$$\left\{ \frac{1}{2\sqrt{a(t_2-t_1)}} \times \left( e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)} - 1 \right) - \frac{h}{\lambda} \cdot e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)} \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)} \right\} +$$

$$+ (\theta_i - \theta_{s1}) \left( 1 + \frac{\lambda}{2h\sqrt{a t_1}} \right) \left\{ 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)} \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)} \right\} \times \frac{1}{2\sqrt{a(t_3-t_2)}}$$

$$- B(p) \cdot q + \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial \theta(x, t_3)}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{h}{\lambda} \left[ \theta(x, p) - \frac{\theta_i}{p} \right]_{x=0}$$

$$\theta(0, p) = B(p) + \frac{\theta_{s1}}{p}$$

$$- B(p) \cdot q + \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial \theta(x, t_3)}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{h}{\lambda} \left( B(p) + \frac{\theta_{s1} - \theta_i}{p} \right)$$

$$B(p) \left( \frac{h}{\lambda} + q \right) = \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial \theta(x, t_3)}{\partial x} \right]_{x=0} - \frac{\theta_{s1} - \theta_i}{p} \times \frac{h}{\lambda}$$

$$B(p) = \frac{1}{p \left( q + \frac{h}{\lambda} \right)} \times (\theta_i - \theta_{s1}) \left[ \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{a t_1}} + \left( 1 + \frac{\lambda}{2h\sqrt{a t_1}} \right) \left\{ \frac{e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)} - 1}{2\sqrt{a(t_2-t_1)}} - \right. \right.$$

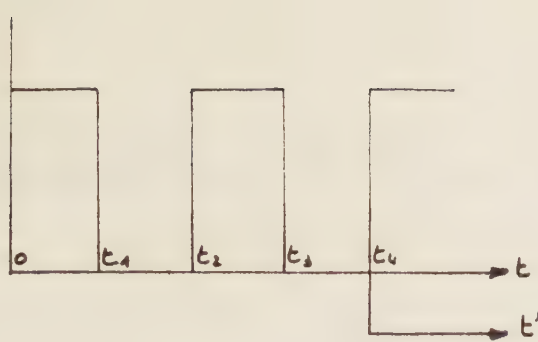
$$\left. - \frac{h}{\lambda} \cdot e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)} \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)} + \frac{1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)} \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_2-t_1)}}{2\sqrt{a(t_3-t_2)}} \right\} \right]$$

$$\theta(x, p) = B(p) \cdot e^{-qx} + \frac{\theta(x, t_3)}{p}$$

$$\theta(x, t') = \theta(x, t_3) + [\xi] (\theta_i - \theta_{s1}) \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a t'}} - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} x + \frac{h^2}{\lambda^2} a t'} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a t'}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a t'} \right) \right\}$$

$$\theta(x, t) = \theta(x, t_3) + (\theta_i - \theta_{s1}) [\xi] \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_3)}} - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} x + \frac{h^2}{\lambda^2} a(t-t_3)} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_3)}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t-t_3)} \right) \right\}$$

**6.3** Quand le point considéré revient pour la troisième fois en contact avec les garnitures :



En utilisant la même méthode que pour le deuxième passage devant les garnitures, nous obtenons la relation suivante donnant l'évolution de la température dans le disque en regard du point considéré lorsque celui-ci passe pour la troisième fois devant les garnitures :

$$\theta(x, t) = \theta(x, t_4) + (\theta_{s1} - \theta(0, t_4)) \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_4)}}$$

avec

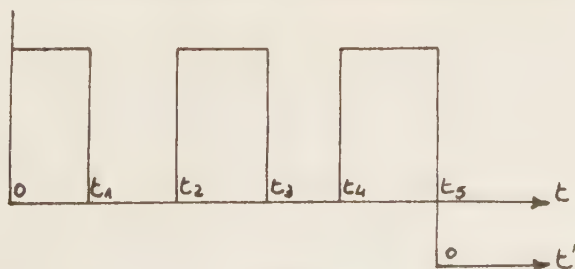
$$\theta(0, t_4) = \underset{\theta_{s1}}{\theta(0, t_3)} + (\theta_i - \theta_{s1}) \left[ \xi \right] \left( 1 - e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a (t_4 - t_3)} \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_4 - t_3)} \right)$$

Nous pouvons déduire la relation donnant l'évolution de la température dans le disque lorsque le point considéré viendra pour la  $n^{\text{eme}}$  fois en contact avec les garnitures :

$$\theta(x, t) = \theta(x, t_{2n-2}) + (\theta_{s1} - \theta(0, t_{2n-2})) \times \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-2})}}$$

$$t_{2n-2} < t < t_{2n-1}$$

**6.4** Température dans le disque quand le point considéré revient pour la troisième fois dans l'air.



Nous obtenons, par la même méthode que lors du second passage dans l'air, la relation suivante :

$$\theta(x, t) = \theta(x, t_5) + \left\{ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial \theta(x, t_5)}{\partial x} \right]_{x=0} \right\} \times \\ \times \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_5)}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}a(t-t_5)} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_5)}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t-t_5)} \right) \right\}$$

$$t_5 < t < t_6 < T_1$$

La température dans le disque en regard du point considéré lors du n<sup>ème</sup> passage de celui-ci dans l'air est donnée par la relation :

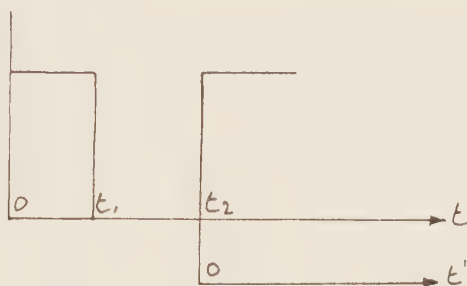
$$\theta(x, t) = \theta(x, t_{2n-1}) + \left\{ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial \theta(x, t_{2n-1})}{\partial x} \right]_{x=0} \right\} \times \\ \times \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} - e^{\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{\lambda^2}a(t-t_{2n-1})} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_{2n-1})}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t-t_{2n-1})} \right) \right\}$$

$$\left[ \frac{\partial \theta(x, t_{2n})}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[ \frac{\partial \theta(x, t_{2n-1})}{\partial x} \right]_{x=0} + \left\{ (\theta_i - \theta_{s1}) \frac{h}{\lambda} + \left[ \frac{\partial \theta(x, t_{2n-1})}{\partial x} \right]_{x=0} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{e^{\frac{h^2}{\lambda^2}a(t_{2n}-t_{2n-1})} - 1}{2\sqrt{a(t_{2n}-t_{2n-1})}} - \frac{h}{\lambda} e^{\frac{h^2}{\lambda^2}a(t_{2n}-t_{2n-1})} \times \operatorname{erfc} \frac{h}{\lambda} \sqrt{a(t_{2n}-t_{2n-1})} \right\}$$

EVOLUTION DE LA TEMPERATURE DANS LE DISQUE lors

des premiers instants du freinage.  $\theta_{s1} = \theta_i + \mu t$

7.1 Détermination de la température dans le disque quand le point considéré vient pour la deuxième fois en contact avec les garnitures.



Les conditions aux limites sont :

$$\theta(0, t) = \theta_{s1} = \theta_i + \mu t$$

$$\theta(\infty, t) = \theta_i$$

$\theta(x, t_2)$  est déterminée à partir de la relation donnant  $\theta(x, t)$  durant le premier passage du point du disque dans l'air, soit :

$$\theta(x, t_2) = \theta(x, t_1) + \mu t_1 \left( -\frac{h}{\lambda} - \frac{2 + \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi \alpha t_1}} \right) \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t_2 - t_1)}} - e^{-\frac{h}{\lambda}x + \frac{h^2}{4\lambda^2}\alpha(t_2 - t_1)} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha(t_2 - t_1)}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{\alpha(t_2 - t_1)} \right) \right\}$$

posons :  $\theta^*(x, t) = \theta(x, t) - \theta(x, t_2)$



Appliquons la même méthode de calcul que lors du premier passage devant les garnitures.

$$\theta^*(x, t) = \int_0^{t'} \phi(\lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(x, t' - \lambda) d\lambda$$

avec  $T(x, t') = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at'}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at'}}$

$$\theta^*(x, t') = \int_0^{t'} \mu \lambda \cdot \frac{x}{2\sqrt{a\pi(t' - \lambda)^3}} \cdot e^{-x^2/4a(t' - \lambda)} d\lambda$$

En effectuant les calculs comme précédemment, nous obtenons :

$$\theta^*(x, t') = \mu t' \left\{ \left( 1 + \frac{x^2}{2at'} \right) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at'}} - x \frac{e^{-x^2/4at'}}{\sqrt{a\pi t'}} \right\}$$

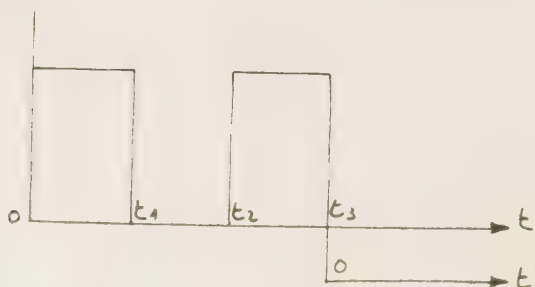
$$\theta(x, t) = \mu(t - t_2) \left\{ \left( 1 + \frac{x^2}{2a(t - t_2)} \right) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t - t_2)}} - x \frac{e^{-x^2/4a(t - t_2)}}{\sqrt{a\pi a(t - t_2)}} \right\} + \theta(x, t_2)$$

**7.2** Détermination de la température dans le disque quand le point considéré vient pour la deuxième fois dans l'air.

Les conditions aux limites sont :

$$\theta(0, t_3) = \theta_i + \mu t_3 \rightarrow \text{à l'instant où le point cesse d'être en contact avec les garnitures.}$$

$$\theta(\infty, t) = \theta_i$$



La solution de l'équation différentielle déduite de l'équation de la diffusion s'écrit :

$$\overline{\theta}(x,p) = A(p) \cdot e^{qx} + B(p) \cdot e^{-qx} + \theta(x,t_3)/p$$

$A(p) = 0$  car  $\overline{\theta}(x,p)$  prend la valeur finie  $\theta_i/p$  quand  $x$  tend vers l'infini; d'où :

$$\overline{\theta}(x,p) = B(p) \cdot e^{-qx} + \theta(x,t_3)/p$$

La condition d'échange thermique par convection entre le disque et le milieu ambiant s'écrit :

$$\begin{aligned} -\lambda \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0} &= h \left[ \frac{\theta_i}{p} - \overline{\theta}(x,p) \right]_{x=0} \\ &= h \left[ \frac{\theta_i}{p} - B(p) - \frac{\theta_i + \mu t_3}{p} \right] \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{h}{\lambda} \left[ B(p) + \frac{\mu t_3}{p} \right]$$

Explicitons l'expression de la dérivée de la transformée de Laplace de la température par rapport à  $x$  pour la valeur  $x = 0$ .

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0} = -B(p) \cdot q + \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x,t_3) \right]_{x=0}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x,t_3) \right]_{x=0} = \mu(t_3 - t_2) \left( \frac{-1}{2\sqrt{a(t_3 - t_2)}} - \frac{1}{\sqrt{a\pi(t_3 - t_2)}} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x,t_2) \right]_{x=0}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x,t_2) \right]_{x=0} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x,t_1) \right]_{x=0} + \mu t_1 \left( -\frac{h}{\lambda} - \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2\sqrt{a\pi t_1}} \right) \left\{ \frac{-1}{2\sqrt{a(t_2 - t_1)}} - \right.$$

$$-\frac{h}{\lambda} e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)} \times \operatorname{erfc} \frac{h \sqrt{a(t_2-t_1)}}{\lambda} + \frac{e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)}}{2 \sqrt{a(t_2-t_1)}} \Bigg\}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_1) \right]_{x=0} = \mu t_1 \left( \frac{-1}{2 \sqrt{a t_1}} - \frac{1}{\sqrt{\pi a t_1}} \right)$$

d'où :

$$\left[ \frac{\partial \theta(x, t_3)}{\partial x} \right]_{x=0} = \mu t_1 \left( \frac{-1}{2 \sqrt{a t_1}} - \frac{1}{\sqrt{\pi a t_1}} \right) + \mu t_1 \left( -\frac{h}{\lambda} - \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\pi a t_1}} \right) \left\{ \frac{e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)} - 1}{2 \sqrt{a(t_2-t_1)}} - \right. \\ \left. - \frac{h}{\lambda} \cdot e^{\frac{h^2}{\lambda^2} a(t_2-t_1)} \times \operatorname{erfc} \frac{h \sqrt{a(t_2-t_1)}}{\lambda} \right\} + \mu (t_3 - t_2) \left( \frac{-1}{2 \sqrt{a(t_3-t_2)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi a(t_3-t_2)}} \right)$$

$$- B(p) \cdot q + \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_3) \right]_{x=0} = \frac{h}{\lambda} \left( B(p) + \frac{\mu t_3}{p} \right)$$

ce qui conduit finalement à :

$$\theta(x, p) = \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_3) \right]_{x=0} - \frac{h}{\lambda} \mu t_3}{p \left( q + \frac{h}{\lambda} \right)} \cdot e^{-qx} + \frac{\theta(x, t_3)}{p}$$

L'original de cette fonction est :

$$\theta(x, t) = \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t_3) \right]_{x=0} - \frac{h}{\lambda} \mu t_3 \right\} \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2 \sqrt{a(t-t_3)}} - \right. \\ \left. - e^{\frac{h}{\lambda} x + \frac{h^2}{\lambda^2} a(t-t_3)} \times \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2 \sqrt{a(t-t_3)}} + \frac{h \sqrt{a(t-t_3)}}{\lambda} \right) \right\} + \theta(x, t_3)$$

CALCUL DE LA DERIVEE DE LA TEMPERATURE par rapport

à y pour la valeur y = l' .

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ C(p) \cdot \text{ch } qy + \frac{O(y, t'_1)}{p} \right]_{y=l'} = \frac{h}{\lambda} \left[ -\theta(y, p) - \frac{\theta_i}{p} \right]_{y=l'}$$

$$C(p) \cdot q \cdot \text{sh } ql' + \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_1) \right]_{y=l'} = \frac{h}{\lambda} \left[ \frac{\theta_i}{p} - C(p) \cdot \text{ch } ql' - \underbrace{\frac{\theta(l', t'_1)}{p}}_{\theta_{s2}} \right]$$

$$\theta(y, t'_1) = (\theta_{s2} - \theta(y, T_1)) \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{e^{-a(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_1 - T_1)}}{2n+1} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2l'} \right\} + \theta(y, T_1)$$

$$\frac{\partial \theta(y, t'_1)}{\partial y} = (\theta_{s2} - \theta(y, T_1)) \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{e^{-a(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_1 - T_1)}}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)\pi}{2l'} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2l'} \right\} +$$

$$+ \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{e^{-a(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_1 - T_1)}}{2n+1} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2l'} \right\} \left[ -\frac{\partial \theta(y, T_1)}{\partial y} \right] + \frac{\partial \theta(y, T_1)}{\partial y}$$

$$= (\theta_{s2} - \theta(y, T_1)) \left\{ \frac{2}{l'} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n e^{-a(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_1 - T_1)} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2l'} \right\} +$$

$$+ \frac{\partial \theta(y, T_1)}{\partial y} \times \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{e^{-a(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_1 - T_1)}}{2n+1} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2l'}$$

$$\cos(2n+1) \frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} = (-1)^n$$

La dérivée de  $\theta(y, t'_1)$  par rapport à y pour y = l' est :

$$\left[ \frac{\partial \theta(y, t'_1)}{\partial y} \right]_{y=l'} = (\theta_{s2} - \theta(y, T_1)) \cdot \frac{2}{l'} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-a(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_1 - T_1)}$$

RETOUR A L'ORIGINAL de la fonction :

$$\overline{\theta}(y, p) = A. \frac{\operatorname{ch} qy}{p \left( q \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} ql' \right)} + \frac{\theta(y, t'_1)}{p}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{\operatorname{ch} qy}{p \left( q \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} ql' \right)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{-pt}}{p} \cdot \frac{\operatorname{ch} qy}{\left( q \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} ql' \right)} \cdot dp$$

- Résidu du pole  $p = 0$

$$\frac{\operatorname{ch} qy \cdot e^{pt}}{p \left( q \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} ql' \right)} \text{ est de la forme } \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{f(p)}{(p-a) \xi(p)}$$

cas pour lequel le résidu est :

$$\mathcal{R}(a) = \frac{f(a)}{\xi(a)} \implies \mathcal{R}(0) = \frac{1}{\frac{h}{\lambda}} \quad \boxed{\mathcal{R}(0) = \frac{\lambda}{h}}$$

- Valeurs de  $p$  pour lesquelles  $q \operatorname{sh} ql' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} ql' = 0$

$$p = -a\alpha_n^2 \quad q = i\alpha_n \quad (q^2 = p/a) \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

où  $i\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  sont les racines de :

$$i\alpha \operatorname{sh} i\alpha l' = -\frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} i\alpha l'$$

$$\alpha \sin \alpha l' = \frac{h}{\lambda} \cos \alpha l'$$

$$\boxed{\alpha \operatorname{tg} \alpha l' = h / \lambda}$$

équation transcendante.

Pour trouver les résidus de ces poles, nous avons besoin de la dérivée du dénominateur.

$$R(\alpha_n) = \frac{f(\alpha_n)}{g'(\alpha_n)}$$

$$\frac{d}{dp} \left[ p \left( q \operatorname{sh} q l' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} q l' \right) \right] = \underbrace{q \operatorname{sh} q l' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} q l'}_{= 0 \text{ pour les racines considérées}} + \left[ p \frac{d}{dp} \left( q \operatorname{sh} q l' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} q l' \right) \right]_{p = -a\alpha_n^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ q \cdot \frac{d}{dq} \left( q \operatorname{sh} q l' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} q l' \right) \right]_{q = i\alpha_n}$$

$$= \frac{1}{2} q \cdot \left( \operatorname{sh} q l' + q \cdot l' \operatorname{ch} q l' + \frac{h}{\lambda} \cdot l' \cdot \operatorname{sh} q l' \right)$$

$$= \frac{1}{2} i\alpha_n \left\{ \left( 1 + l' \cdot \frac{h}{\lambda} \right) \operatorname{sh} i\alpha_n l' + i\alpha_n l' \operatorname{ch} i\alpha_n l' \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \alpha_n \left\{ \left( 1 + l' \cdot \frac{h}{\lambda} \right) \sin \alpha_n l' + \alpha_n l' \cos \alpha_n l' \right\}$$

$$\frac{d}{dp} \left[ p \cdot \left( q \operatorname{sh} q l' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} q l' \right) \right] = -\frac{1}{2} \left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'$$

Le résidu de  $p = -a\alpha_n^2$  est donc :

$$\begin{aligned} R(\alpha_n) &= \frac{-2 \cdot e^{-a\alpha_n^2 t} \cdot \operatorname{ch} i\alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'} \\ &= \frac{-2 e^{-a\alpha_n^2 t} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'} \end{aligned}$$



$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{-pt} \cdot \operatorname{ch} q y}{p \left( q \operatorname{sh} q l' + \frac{h}{\lambda} \operatorname{ch} q l' \right)} dp = \sum \text{Résidus}$$

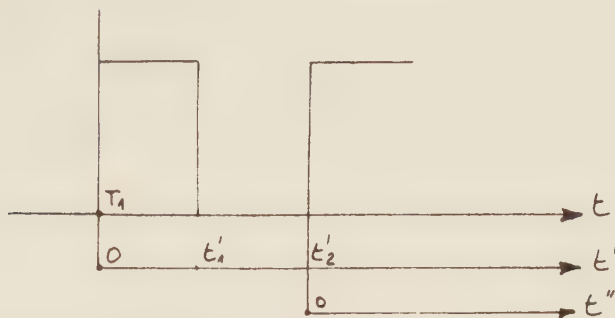
$$= \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'}$$

Nous obtenons finalement pour  $\Theta(y, t)$  :

$$\Theta(y, t) = \left\{ \frac{h}{\lambda} (\Theta_i - \Theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \Theta(y, t'_1)}{\partial y} \right]_{y=l'} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 (t-t'_1)} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'} \right\} + \Theta(y, t'_1)$$

EVOLUTION DE LA TEMPERATURE DANS LE DISQUE quand le point revient en contact avec les garnitures pour la deuxième fois après l'instant  $T_1$ .



Les conditions aux limites sont :

$$\theta(-1', t'') = \theta_{s2} = \theta(1', t'')$$

La condition de flux de chaleur nul dans le plan de symétrie du disque implique que le gradient de température est nul à cet endroit soit :

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$$

La condition initiale est :

$$\theta(y, t''=0) = \theta(y, t'_2)$$

$$\theta(y, t'_2) = \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \theta(y, t'_1)}{\partial y} \right]_{y=l'} \right\} \times$$

$$\left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 (t'_2 - t'_1)} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'} \right\} + \theta(y, t'_1)$$

La solution de l'équation différentielle déduite de l'équation de la diffusion est : (en transformée de Laplace)

$$\bar{\theta}(y,p) = A(p) \cdot e^{qy} + B(p) \cdot e^{-qy} + \theta(y,t'_2)/p$$

La condition de flux de chaleur nul à  $y = 0$  implique que :

$$\left[ \frac{\partial \theta(y,p)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad \text{ce qui conduit à : } q \cdot A(p) - q \cdot B(p) = 0$$

soit  $A(p) = B(p)$

La transformée de Laplace de la température s'écrit alors :

$$\bar{\theta}(y,p) = C(p) \cdot \text{ch } qy + \theta(y,t'_2)/p$$

Les conditions aux limites imposent que :

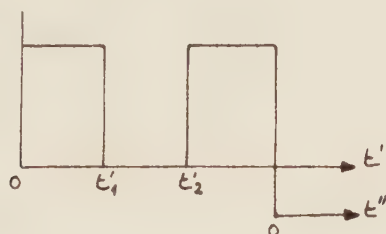
$$\bar{\theta}(l',p) = \theta_{s2}/p = \theta(y,t'_2)/p + C(p) \text{ ch } ql'$$

$$\frac{\theta(y,p) - \theta(y,t'_2)/p}{\theta_{s2} - \theta(y,t'_2)} = \frac{\text{ch } qy}{\text{ch } ql'}$$

L'étude de ce type de transformée a été faite précédemment et conduit à la relation suivante :

$$\frac{\theta(y,t) - \theta(y,t'_2)}{\theta_{s2} - \theta(y,t'_2)} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{e^{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l'^2} (t-t_1)}}{2n+1} \cdot \cos \frac{(2n+1) \cdot \pi y}{2l'}$$

EVOLUTION DE LA TEMPERATURE DANS LE DISQUE quand le point revient pour la seconde fois en contact avec l'air après  $T_1$ .



La relation d'échange thermique par convection entre le disque et le milieu ambiant s'écrit :

$$-\lambda \left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=l'} = h \left[ \theta_i - \theta(y, t') \right]_{y=l'}$$

La condition aux limites est :

$$\theta(-l', t'_3) = \theta(l', t'_3) = \theta_{s2}$$

La condition initiale est :

$$\theta(y, t'_3) = \left( \theta_{s2} - \theta(y, t'_2) \right) \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(t'_3 - t'_2) \cdot \cos \frac{(2i+1)\pi y}{2l'} \right\} + \theta(y, t'_2)$$

avec  $\varphi(t'_3 - t'_2) = (-1)^i \times \frac{e^{-a \frac{(2i+1)^2 \pi^2}{4l'^2} (t'_3 - t'_2)}}{2i+1}$

La condition de flux de chaleur nul dans le plan de symétrie implique, comme précédemment que le gradient de température est nul à cet endroit soit :

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$$

La solution de l'équation de la diffusion s'écrit :

$$\bar{\theta}(y, p) = A(p) e^{qy} + B(p) e^{-qy} + \theta(y, t'_3)/p$$

avec  $\theta(0, t'_3) = \left( \theta_{s2} - \theta(0, t'_2) \right) \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{e^{-a(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2} (t'_3 - t'_2)}}{2i+1} \right\} + \theta(0, t'_2)$

La condition de flux de chaleur nul dans le plan de symétrie implique que  $A(p) = B(p)$

d'où  $\bar{\theta}(y, p) = C(p) \cdot \text{ch } qy + \theta(y, t'_3)/p$

La condition d'échange par convection permet de déterminer  $C(p)$  :

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=l'} = \frac{h}{\lambda} \left[ \theta(y, t'_1) - \theta_i \right]_{y=l'} = - \left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=l'}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} C(p) \cdot \text{ch } qy + \frac{\theta(y, t'_3)}{p} \right]_{y=l'} = \frac{h}{\lambda} \left[ \frac{\theta_i}{p} - \theta(y, t'_1) \right]$$

$$\left[ C(p) \cdot q \cdot \text{sh } qy + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_3) \right]_{y=l'} = \frac{h}{\lambda} \left[ \frac{\theta_i}{p} - C(p) \cdot \text{ch } ql' - \frac{\theta(l', t'_3)}{p} \right]$$

$\theta_{s2}$

$$\left[ C(p) \cdot q \cdot \text{sh } ql' + \frac{1}{p} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_3) \right]_{y=l'} \right] = \frac{h}{\lambda} \left[ \frac{\theta_i - \theta_{s2}}{p} - C(p) \cdot \text{ch } ql' \right]$$

$$\theta(y, t'_3) = \left[ \theta_{s2} - \theta(y, t'_2) \right] \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{e^{-a(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2} (t'_3 - t'_2)}}{2i+1} \cdot \cos \pi y (2i+1)/2l' \right] +$$

$$+ \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_1) \right]_{y=l'} \right\} \left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a \alpha_n^2 (t'_1 - t'_2)} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ l' \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n l'} \right\} + \theta(y, t'_1)$$

$$\frac{\partial \theta(y, t'_3)}{\partial y} = \left( \theta_{s2} - \theta(y, t'_2) \right) \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{e^{-a(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2} (t'_3 - t'_2)}}{2i+1} \times \frac{(2i+1)\pi}{2l'} \times \sin \frac{(2i+1)\pi y}{2l'} \right\} +$$

$$+ \left\{ 1 - \underbrace{\frac{4}{\pi} \sum \varphi(t'_3 - t'_2) \cdot \cos \frac{(2i+1)\pi y}{2\ell'}}_{=0 \text{ pour } y=1'} \right\} \left[ -\frac{\partial \theta(y, t'_1)}{\partial y} \right] + \left[ \frac{\partial \theta(y, t'_2)}{\partial y} \right]$$

$$\left[ \frac{\partial \theta(y, t'_3)}{\partial y} \right]_{y=\ell'} = \left( \theta_{s2} - \theta(y, t'_2) \right) \frac{2}{\ell'} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-a \frac{(2i+1)^2 \pi^2}{4\ell'^2} (t'_3 - t'_2)}$$

$$\overline{\theta}(y, p) = \frac{\frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \theta(y, t'_3)}{\partial y} \right]_{y=\ell'} \cdot \operatorname{ch} q y}{p \left( q \cdot \operatorname{sh} q \ell' + \frac{h}{\lambda} \cdot \operatorname{ch} q \ell' \right)} + \frac{\theta(y, t'_3)}{p}$$

Pour revenir à l'original, nous obtenons par le même calcul que lors du premier passage dans l'air pour  $t > T_1$ , la relation suivante :

$$\theta(y, t') = \left\{ \frac{h}{\lambda} (\theta_i - \theta_{s2}) - \left[ \frac{\partial \theta(y, t'_3)}{\partial y} \right]_{y=\ell'} \right\} \left\{ \frac{\lambda}{h} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a \alpha_n^2 (t' - t'_2)} \cdot \cos \alpha_n y}{\left[ \ell \left( \frac{h^2}{\lambda^2} + \alpha_n^2 \right) + \frac{h}{\lambda} \right] \cos \alpha_n \ell'} \right\} + \theta(y, t'_3)$$



CALCUL DE LA DERIVEE DE LA TEMPERATURE  $\theta(y, t'_{2m-1})$

pour la valeur  $y = l'$ .

$$\theta(y, t'_{2m-1}) = (\theta_{s2} - \theta(y, t'_{2m-2})) \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{e^{-a(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_{2m-1} - t'_{2m-2})}}{2i+1} \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{(2i+1)\pi y}{2l'} \right\} + \theta(y, t'_{2m-2})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-1}) = (\theta_{s2} - \theta(y, t'_{2m-2})) \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{e^{-a(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_{2m-1} - t'_{2m-2})}}{2i+1} \cdot \frac{(2i+1)\pi}{2l'} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{(2i+1)\pi y}{2l'} \right\} + \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi \cdot \cos \frac{(2i+1)\pi y}{2l'} \right\} \left[ -\frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-2}) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-2}) \right] \\ = (\theta_{s2} - \theta(y, t'_{2m-2})) \left\{ \frac{2}{l'} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i e^{-a(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_{2m-1} - t'_{2m-2})} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{(2i+1)\pi y}{2l'} \right\} + \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-2}) \right] \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{e^{-a(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_{2m-1} - t'_{2m-2})}}{2i+1} \cdot \cos \frac{(2i+1)\pi y}{2l'} \right\}$$

Nous obtenons finalement :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} \theta(y, t'_{2m-1}) \right]_{y=l'} = (\theta_{s2} - \theta(y, t'_{2m-2})) \cdot \frac{2}{l'} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-a(2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4l'^2} (t'_{2m-1} - t'_{2m-2})}$$

DETERMINATION DU COEFFICIENT DE CONVECTION "h".

Nous devons tenir compte de la vitesse relative du disque par rapport à l'air. Nous disposons pour cela de trois formules :

- La formule d'EICHELBURG :

$$(1) \quad h = 0,78 \sqrt[3]{V_m} \cdot \sqrt{P_1 \cdot \theta_i}$$

$V_m$  est la vitesse relative d'un point du disque par rapport au milieu ambiant considéré comme immobile.

$P_1$  est la pression ambiante exprimée en  $N/cm^2$

$\theta_i$  est la température, exprimée en °K, du milieu ambiant.

- Les formules de JURGENS :

$$(2) \quad h = (5 + 3,5 \cdot V) \cdot \frac{4 \cdot 186}{3 \cdot 600} \quad \text{pour } V < 5 \text{ m/s}$$

Cette vitesse limite de 5 m/s correspond, avec une décélération de  $9,26 \text{ m/s}^2$  à :

$$(T - t) = \frac{V}{|Y|} \times \frac{R}{r_0} = \frac{5}{9,26} \times \frac{206}{103,5} \approx 1,1$$

$$(3) \quad h = (6,30 \cdot V^{0,78}) \cdot \frac{4 \cdot 186}{3 \cdot 600} \quad \text{pour } V > 5 \text{ m/s}$$

Remplaçons dans ces formules V par  $\gamma(T-t) \cdot r_a / R$

ceci conduit aux relations suivantes :

- avec la formule (1) :

$$h = 0,78 \sqrt[3]{(T-t)r_a \cdot \gamma / R} \cdot \sqrt{P_1 \theta_i}$$

$$= 42,2 \sqrt[3]{(T-t)r_a \cdot \gamma / R} = 65,3 \sqrt[3]{T-t}$$

- avec la formule (2)

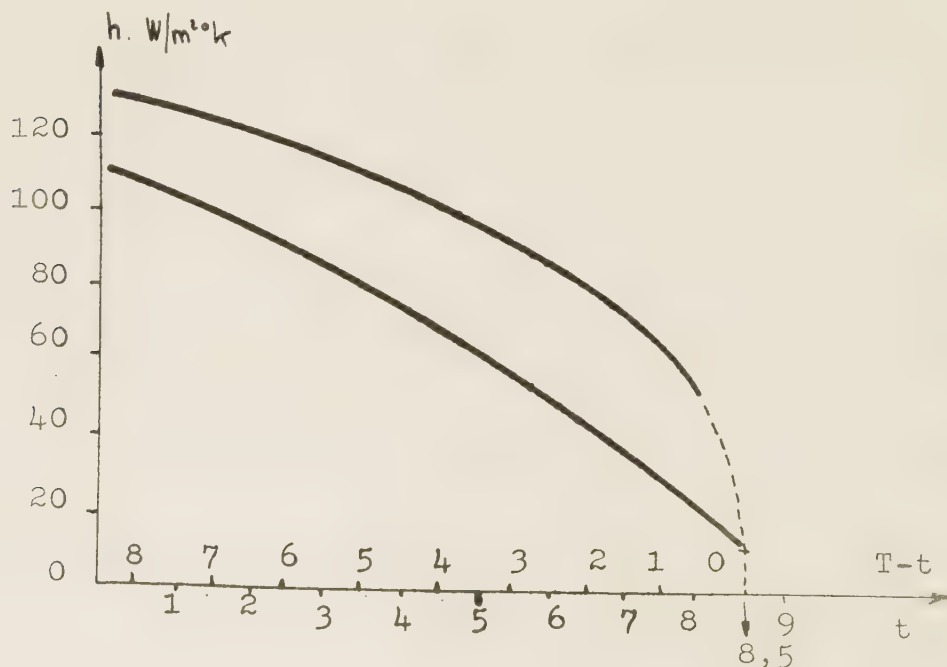
$$h = 5,8 + 15,1 (T-t)$$

- avec la formule (3)

$$h = 20,4 (T-t)^{0,78}$$

La formule d'Eichelberg ne peut être utilisée pour une valeur de V (ou T-t) faible car elle donne une valeur de h tendant vers 0 quand T-t tend vers la même limite.

Traçons les courbes correspondant à ces valeurs :



Il y a deux manières d'introduire  $h$  dans les équations établies précédemment et permettant de calculer  $\theta(x,t)$ .

- 1. Prendre la valeur moyenne de  $h$ .

Soit pour la formule d'Eichelberg

$$h_m = \frac{1}{T} \int_0^T 65,3 \sqrt[3]{T-t} \cdot dt = 49,2$$

Pour  $T = 8,5$  secondes, c'est à dire pour la durée totale du freinage quand la vitesse initiale du véhicule est de 285 km/h , on obtient :

$$h_m = 100 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}$$

Pour les formules de Jürgens :

$$\text{pour } T = 8,5 \text{ s} \quad h_m = 70 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}$$

- 2. Reporter dans  $\theta(x,t)$  la valeur de  $h$  calculée pour chaque valeur de  $t$ .

Compte tenu de l'écart qui peut être observé entre les valeurs de  $h$  obtenues par ces formules, dans les programmes de calcul nous prendrons les valeurs appartenant à une courbe moyenne qui correspond à la formule :

$$h = 15 + 12,7 (T-t)$$

Il est à remarquer que la formule permettant de calculer le coefficient de convection  $h$  en fonction de la vitesse (ou de  $T-t$ ) a été établie avec une certaine imprécision.

Il est en effet difficile de donner une formule exacte car des phénomènes viennent compliquer considérablement le problème du calcul précis de  $h$ . Ces phénomènes sont principalement l'effet de couche limite dynamique et l'effet de couche limite thermique. Il est possible de déduire l'effet de couche limite thermique à partir de l'effet de couche limite dynamique, mais ici ce dernier effet n'est pratiquement pas chiffrable car les conditions d'écoulement de l'air le long du disque sont inconnues. (en particulier le degré de turbulence).

---

PRINCIPE DES THERMOCOUPLES

Ce principe est basé sur la combinaison de deux phénomènes : l'effet Peltier et l'effet Thomson.

Entre deux conducteurs métalliques différents A et B en contact, il existe une différence de potentiel  $E(A,B)$  qui varie avec A/B et avec la température.

Si un courant  $I$  traverse la jonction A/B, il provoque en plus du dégagement de chaleur par effet Joule, un dégagement ou une absorption de chaleur :

$$W = E(A,B) \times I$$

a) Effet Peltier

C'est le phénomène autre que l'effet Joule provoqué par le passage d'un courant électrique à travers la jonction A/B, les deux matériaux étant à la même température.

D'après la loi de Volta :

Un circuit métallique hétérogène porté à une température uniforme n'est traversé par aucun courant.



Si la coupure est effectuée dans l'un des conducteurs, il n'y a pas de différence de potentiel.



### b) Effet Thomson.

C'est le phénomène autre que l'effet Joule provoqué par le passage d'un courant électrique dans un conducteur homogène dont la température n'est pas uniforme.

Entre deux points voisins du conducteur, à une température différente, il existe une différence de potentiel.

$$E \text{ (M/N)} = \int_{\theta_M}^{\theta_N} \tau d\theta$$

$\tau$  étant le coefficient de Thomson.

Loi de Magnus :

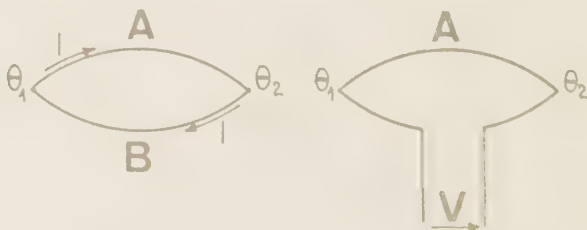
Un circuit formé d'un conducteur homogène, à température non uniforme, n'est le siège d'aucun courant électrique.

Si le circuit est ouvert, il existe une différence de potentiel entre les extrémités, si celles-ci sont à des températures différentes.

### c) Effet Seebeck.

Un circuit formé de deux conducteurs différents A et B soudés par leurs extrémités, est parcouru par un courant électrique lorsque les deux soudures sont à des températures différentes  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Si le circuit est ouvert par coupure dans l'un des conducteurs, les extrémités sont à la même température, il existe entre elles



une différence de potentiel qui ne dépend que de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

d) Lois de la thermoélectricité.

- loi des circuits homogènes.

Un courant électrique ne peut naître dans un circuit d'un seul conducteur par application de la chaleur seule.

- Loi des conducteurs intermédiaires.

La somme algébrique des forces électromotrices développées dans un circuit d'un nombre quelconque de métaux différents est nulle si tout le circuit est à la même température.

- Loi des températures intermédiaires.

La force électromotrice d'un couple de conducteurs A et B dont les jonctions sont aux températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est la somme algébrique des forces thermoélectriques de couples des mêmes conducteurs A et B dont les jonctions sont aux températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

La somme algébrique des forces thermoélectriques qui prennent naissance dans un circuit quelconque d'un nombre quelconque de conducteurs n'est fonction que des températures des jonctions.

Par conséquent, l'introduction d'un appareil de mesure dans le circuit n'introduit aucune force électromotrice d'origine thermique si l'appareil et les points de jonction avec les métaux du thermocouple sont à la même température.

PRINCIPE DE LA MESURE DES TEMPERATURES PAR INFRAROUGES

On peut déduire la température d'une source, de son rayonnement, soit par la quantité d'énergie (mesure du rayonnement total), soit par la qualité de cette énergie (répartition spectrale par exemple).

La mesure par photographie des infrarouges est une mesure de quantité d'énergie.

La luminance énergétique  $L$  est l'intensité énergétique rayonnée par unité de surface apparente de la source.

Les lois de rayonnement du corps noir donnent (formule de Planck) :

$$L^{\circ}_{\lambda,T} = C_1 \cdot \lambda^{-5} / \left[ \exp(C_2 / T) - 1 \right]$$

où  $L^{\circ}_{\lambda,T}$  est la luminance spectrale (W/stéradian)

$\lambda$  la longueur d'onde considérée (en cm)

$T$  la température absolue

$$C_1 = 11,906 \cdot 10^{-13} \text{ W.cm}^2.\text{strd}$$

$$C_2 = 1,438 \text{ cm.}^{\circ}\text{K}$$

Pour un corps incandescent, la luminance totale est donnée par la relation :

$$L_t = \epsilon_t \cdot \sigma \cdot T^4$$

avec  $\epsilon_t = 0,58 (\rho \cdot T)^{1/2} - 0,18 \rho T$

(loi de Foote)

$$\sigma = \left( \frac{2 \pi^5}{15} \right) \left( \frac{C_1}{C_2^4} \right)$$

(constante de Stefan)

La luminance énergétique est proportionnelle à la puissance  $4^e$  de la température absolue.

Par étalonnage des densités d'éclairement du film infrarouge (sensible à des radiations comprises entre 6 800 et 9 200 Å) , en comparant les densités relevées au cours de l'essai et celles relevées sur un disque témoin, nous pourrions déduire les températures de surface.

En effet, après développement, la densité D du film est liée à l'éclairement E reçu pendant le temps d'exposition t donc à la quantité d'infrarouges émis, donc à la température de surface du disque.



## **BIBLIOGRAPHIE**

H.S.CARSLAW and J.C.JAEGER.

Conduction of heat in solids. Oxford at the Clarendon Press.

A.FURIA.

Tendances des techniques de freinage des véhicules européens. Journal de la S.I.A. n°71819.

A.KASTLER, R.VICHNIEVSKY et J.CHANU.

Cours de physique générale, Thermodynamique.

J.ODIER

Bases thermiques des problèmes de frottement appliqués au freinage. Bulletins n° 13, 14 et 23 de la S.F. des Mécaniciens.

P.VERNOTTE.

Thermocinétique. Publications Scientifiques et Techniques du ministère de l'air.

---







